

1. Гравітаційною лінзою (ГЛ) називається масивне небесне тіло маси M , в гравітаційному полі якого може відбуватись помітне відхилення світлових променів, що випромінюються джерелом S , від прямолінійного поширення (рис. 1).

Кут α відхилення світла залежить від гравітаційного радіуса ГЛ $r_g = 2GM/c^2$ (G – гравітаційна стала, c – швидкість світла) та прицільного параметра ξ – найменшої відстані від ГЛ до початкового напрямку променя (мал. 1)

Завдання 1. При якому співвідношенні між ξ та r_g кут α буде малим? ($\alpha \ll 1$)

Кут α зв'язаний із ξ та r_g співвідношенням $\alpha = A(r_g)/\xi$ (1), де $A(r_g)$ суттєво залежить від того, яку теорію (Ньютона чи Ейнштейна) використовують для опису явища.

Завдання 2. Використовуючи закон всесвітнього тяжіння Ньютона, вважаючи кут відхилення α малим, доведіть справедливність співвідношення (1) та знайдіть чому дорівнює $A(r_g)$.

Вказівка: Вважати за початковий момент часу $t=0$ момент, коли світло проходить повз гравітаційну лінзу ($r(t=0)=\xi$), і $dr/dt=c$.

На рис. 2 зображено хід променя, який поширюється від джерела S до спостерігача на Землі (точка O) повз ГЛ (точка D). Для спрощення траєкторію променя зображено у вигляді ламаної. Спостерігач бачить джерело випромінювання не в точці S (у напрямку OS під кутом γ), а в напрямку променя OC на прямій OS' під кутом β .

Завдання 3. Вважаючи, кути β, γ малими, і що кут α визначається співвідношенням (1), а величини l та L – відомі, знайдіть рівняння ГЛ, що пов'язує кути β, γ , відстані l, L і коефіцієнт $A(r_g)$.

Завдання 4. Знайдіть кут β як функцію γ та l, L і $A(r_g)$. Скільки зображень джерела буде спостерігатись? Якщо зображень буде більше одного, то зобразіть схематично хід променів у полі ГЛ і знайдіть прицільні параметри та кути відхилення для кожного з них

Завдання 5. Що буде спостерігатись, коли точки S, D та O лежать на одній прямій?

2. Циліндричний електронний пучок з однорідною концентрацією n рухається із релятивістською швидкістю v_0 вздовж силових ліній зовнішнього однорідного магнітного поля з індукцією B_0 , обертаючись як єдине ціле навколо своєї осі. Якою має бути частота обертання, щоб пучок зберігав свою форму? Вважати, що 1) поперечна складова швидкості електронів значно менша від поздовжньої складової; 2) індукція магнітного поля поздовжнього струму силою I з аксіально-симетричним розподілом густини на віддалі r від осі визначається лише силою струму через поперечний переріз циліндра радіусу r , вісь якого збігається з віссю системи: $B = \mu_0 I / (2\pi r)$.

3. На рисунку подана залежність вертикальної швидкості парашутиста від часу. Проаналізуйте графік з фізичної точки зору і аргументовано вкажіть на можливі наявні в ньому

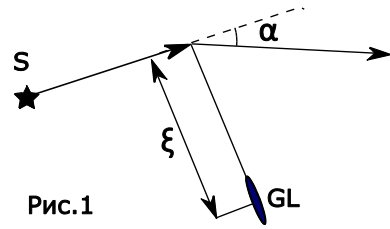


Рис.1

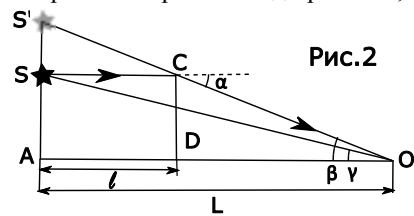
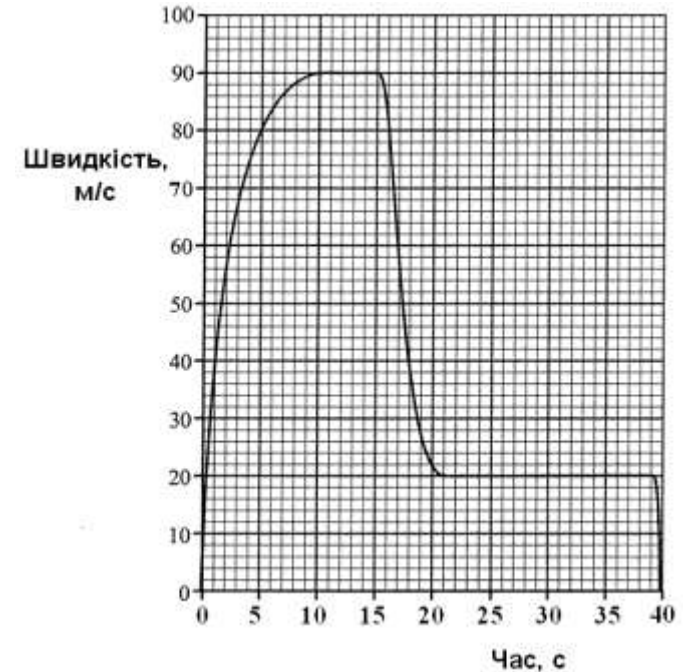


Рис.2

неточності. Зобразіть схематично правильну, на Ваш погляд, залежність вертикальної швидкості парашутиста від часу. Висоту падіння парашутиста оберіть приблизно такою самою, як і на наведеному рисунку.

4. Маятникова система складається з двох кульок масами m_1 та m_2 , сполучених легким стержнем. Цю систему розташували біля поверхні сферичного астероїда так, щоб вона могла вільно обертатись у вертикальній площині навколо горизонтальної осі, що проходить через її центр мас. Який кут із вертикаллю утворює стержень у стані рівноваги? Розрахуйте період малих коливань системи, якщо період обертання супутника, який рухається навколо астероїда з першою космічною швидкістю, складає 130 хв.



5. 11 лютого 2016 року колаборація LIGO оголосила про успішне детектування гравітаційних хвиль, існування яких передбачив Ейнштейном. LIGO складається з двох гравітаційних обсерваторій: у Лівінгстоні (30,6°пн.ш. 90,8°зх.д.) і Хенфорді (46,5°пн.ш. 119,4°зх.д.). Обсерваторія у Хенфорді зафіксувала сигнал на 6,9 мс пізніше, ніж обсерваторія у Лівінгстоні. Визначте, під яким кутом до лінії Лівінгстон-Хенфорд поширювалася гравітаційна хвиля. Гравітаційні хвилі розповсюджуються зі швидкістю світла у вакуумі $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Землю вважати кулею радіусом $R = 6370$ км. Як ще один метод визначення напрямку на джерело гравітаційних хвиль можна використати ефект Доплера. Яка максимальна різниця відносних зсувів частоти хвиль може спостерігатись для обсерваторій колаборації LIGO? Для якого напрямку на джерело?

Вважати, що при ефекті Доплера відносний зсув частоти $\Delta\nu/\nu$ дорівнює відношенню проекції швидкості руху приймача в напрямку джерела до швидкості поширення хвиль.

Задачі запропонували С.Й.Вільчинський (1), І.О.Анісімов (2), О.Ю.Орлянський (3-5)

1. Гравітаційною лінзою (ГЛ) називається масивне небесне тіло масою M , в гравітаційному полі якого може відбуватися помітне відхилення світлових променів, які випускаються джерелом S , від прямолінійного поширення (рис.1).

Угол α відхилення світла залежить від гравітаційного радіуса ГЛ $r_g = 2GM/c^2$ (G – гравітаційна константа, c – швидкість світла) і прицельного параметра ξ – мінімального відстані від ГЛ до напрямку променя (рис. 1)

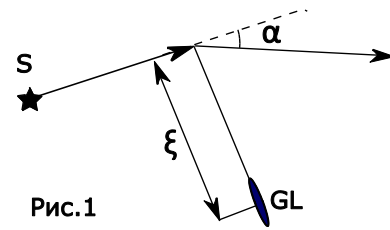


Рис.1

Задание 1. При каком соотношении между ξ и r_g угол α будет малым? ($\alpha \ll 1$)

Угол α связан с ξ и r_g соотношением $\alpha = A(r_g)/\xi$ (1), где $A(r_g)$ существенно зависит от того, какая теория (Ньютона или Эйнштейна) используется для описания явления.

Задание 2. Используя закон всемирного тяготения Ньютона, и считая угол отклонения α малым, докажите справедливость соотношения (1) и найдите, $A(r_g)$?

Указание: Считать начальным моментом времени $t=0$ момент, когда свет проходит мимо гравитационной линзы ($r(t=0)=\xi$), и $dr/dt=c$.

На рис. 2 изображен ход луча, который распространяется от источника S к наблюдателю на Земле (точка O) мимо ГЛ (точка D). Для упрощения траектория луча изображена в виде ломаной. Наблюдатель видит источник излучения не в точке S (в направлении OS) под углом γ , а в направлении луча OC на прямой OS под углом β .

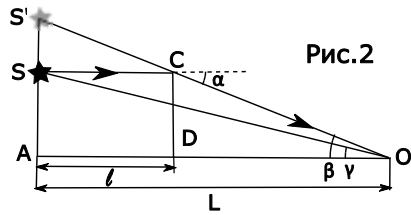


Рис.2

Задание 3. Считая углы β, γ малыми, и что угол α определяется соотношением (1), а величины l и L – известны, найдите уравнение ГЛ, которое связывает углы β, γ , расстояния l, L и $A(r_g)$.

Задание 4. Найдите угол β как функцию γ и l, L и A . Сколько изображений источника будет наблюдаться? Если изображений будет больше одного, то изобразите схематически ход лучей в поле ГЛ и найдите прицельный параметр и угол отклонения для каждого из них.

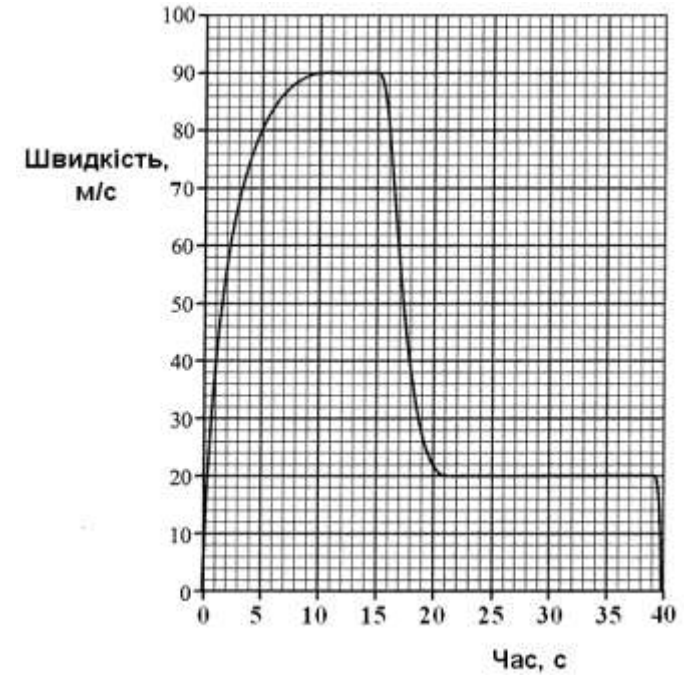
Задание 5. Что будет наблюдаться, если точки S, D и O лежат на одной прямой?

2. Цилиндрический электронный пучок с однородной концентрацией n движется с релятивистской скоростью v_0 вдоль силовых линий внешнего однородного магнитного поля с индукцией B_0 , вращаясь как единое целое вокруг своей оси. Какой должна быть частота вращения, чтобы пучок сохранял свою форму в процессе движения? Считать, что 1) поперечная составляющая скорости электронов значительно меньше продольной составляющей; 2) индукция магнитного поля тока с аксиально-симметричным распределением плотности на расстоянии r от оси определяется только силой тока I через поперечное сечение цилиндра радиуса r , ось которого совпадает с осью системы: $B = \mu_0 I / (2\pi r)$.



осью системы: $B = \mu_0 I / (2\pi r)$.

3 На рис.5 приведена зависимость вертикальной скорости парашютиста от времени. Ваша задача проанализировать график с физической точки зрения и аргументировано указать на возможно содержащиеся в нём неточности. Изобразите схематически правильную, на Ваш взгляд, зависимость вертикальной скорости парашютиста от времени. Высоту падения парашютиста примите приблизительно такой же, как и на приведенном рисунке.



4. Маятниковая система состоит из двух небольших шариков, m_1 та m_2 , соединённых лёгким стержнем. Эту систему установили вблизи поверхности сферического астероида так, чтобы она могла свободно вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через её центр масс. Какой угол с вертикалью образует стержень в положении равновесия? Найдите период малых колебаний системы, если период обращения спутника, движущегося вокруг астероида с первой космической скоростью, равен 130 мин.

5. 11 февраля 2016 року коллаборация LIGO объявила об успешном детектировании гравитационных волн, существование которых было предсказано Эйнштейном еще в 1916 г. LIGO состоит из двух гравитационных обсерваторий: в Ливингстоне (30,6°сев.ш. 90,8°зп.д.) і Хенфорде (46,5°сев.ш. 119,4°зп.д.). Обсерватория в Хенфорде зафиксировала сигнал на 6,9 мс позже чем обсерватория у Ливингстоне. Определите, под каким углом к линии Ливингстон-Хэнфорд двигалась гравитационная волна. Гравитационные волны распространяются со скоростью света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Землю считать шаром радиусом $R = 6370$ км. В качестве еще одного метода определения направления на источник гравитационных волн можно использовать эффект Доплера. Какая максимальна разность относительных смещений частоты волн может наблюдаться для обсерваторий коллаборации LIGO? Для какого направления на источник?

Считать, что при эффекте Доплера относительное смещение частоты $\Delta\nu/\nu$ равно отношению проекции скорости движения приемника в направлении источника к скорости распространения волн.

Задачи предложили С.И.Вильчинский (1), И.А.Анисимов (2), О.Ю.Орлянский (3-5).