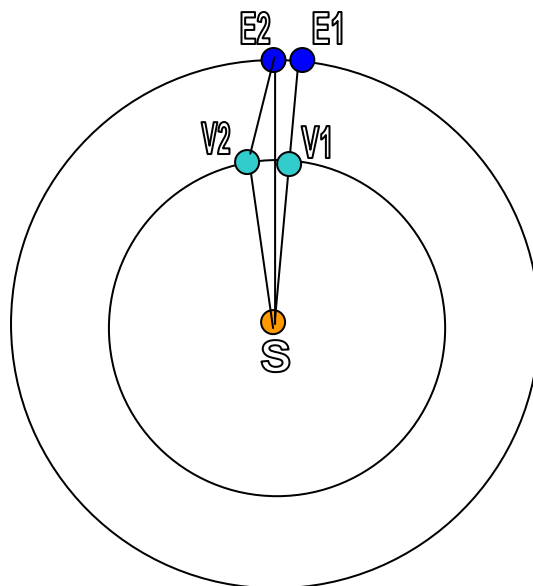


**1. Проходження Венери.** Якщо орбіти Землі та Венери вважати коловими, то яким буде максимальний час проходження Венери по диску Сонця для земного спостерігача? З якого краю диска Сонця (західного чи східного) почнеться проходження?

**Розв'язок**

Максимальний час буде у випадку проходження Венери вздовж сонячного екватора. Цей час можна визначити за синодичним періодом  $S$  обертання Венери відносно Землі, який визначається із виразу:  $1/S = 1/T_V - 1/T_Z$ , де  $T_V$  та  $T_Z$  сидеричні (зоряні) орбітальні періоди Венери та Землі відповідно. В свою чергу, синодичний період визначається за великою піввіссю орбіти тіла:  $T = a^{3/2}$  (третій закон Кеплера). Якщо велика піввісь орбіти виражена в а.о., то період – в роках. Великі півосі орбіт планет:  $a_V = 0.72$  а.о.,  $a_Z = 1.00$  а.о. Отже  $S = 0.72^{1.5} / (1 - 0.72^{1.5}) = 1.5703$  р. За один синодичний період Венера описує дугу по орбіті рівно на  $360^\circ$  більшу, ніж Земля. Тобто, якщо дивитися з боку Сонця, то Венера зміщується відносно Землі зі швидкістю  $0.6277^\circ$  за добу.



Та якщо дивитися з боку Землі, то швидкість зміщення Венери відносно Сонця буде іншою та змінною. При проходженні Венери по диску Сонця обидві планети будуть

розташовані на мінімальній відстані між собою (рисунок). Тут в певний момент  $T_1$  положення Венери та Землі позначені відповідно  $V1$  та  $E1$ , а в момент  $T_2 - V2$  та  $E2$ . Кут  $V2SE2$  (позначимо його  $\alpha$ ) показує зміщення Венери відносно Землі за час  $T_2 - T_1$ , якщо дивитися з боку Сонця. За це же час для земного спостерігача Венера зміститься відносно Сонця на кут  $V2E2S$  (позначимо його  $\beta$ ). За теоремою синусів:  $V2S/\sin\beta = V2E2/\sin\alpha$ . При проходженні Венери по диску Сонця ці кути малі. Тому значення синусів можна замінити самими кутами (в радіанах). Отже  $\beta/\alpha = V2S/V2E2 = 2.571$ .

При проходженні Венери по диску Сонця кут  $\beta$  буде рівний видимому із Землі кутовому розміру диску Сонця (діаметр), збільшеному на два кутові розміри диску Венери. Кутовий розмір Сонця зазвичай приймають рівним  $0.50^\circ$ , кутовий розмір Венери на мінімальній відстані від Землі можна обчислити за лінійним розміром Венери (12100 км) та її відстанню від Землі (0.28 а.о.). Він буде рівним  $1'$ , або  $0.017^\circ$ . Таким чином, кут  $\beta = 0.534^\circ$ . Кут  $\alpha = \beta/2.571 = 0.208^\circ$ . Оскільки швидкість зміни кута  $\alpha$  становить  $0.6277^\circ$  за добу, то на  $0.208^\circ$  цей кут зміниться за 7 год. 57 хв.

З малюнка можна бачити, що проходження Венери по диску Сонця почнеться зі східного краю. Причому для спостерігача в північній півкулі цей рух буде відбуватися зліва направо, а в південній півкулі - навпаки.

**Відповідь:** Якщо орбіти Землі та Венери вважати коловими, то максимальний час проходження Венери по диску Сонця для земного спостерігача становитиме 7 год. 57 хв.

Проходження Венери по диску Сонця почнеться зі східного краю.

**2. Гейзер на Європі.** Нещодавно вчені, проаналізувавши знімки з телескопа Хабла, вперше представили докази існування водяних гейзерів на супутнику Юпітера - Європі. Встановлено, що в середньому одне виверження триває 35 с (з моменту пробивання потоками кори до моменту їх повного випадання на поверхню супутника), а потоки води досягають максимальної висоти 200 м. Користуючись цими даними визначте масу супутника, а також початкову швидкість, з якою гейзери б'ють з льодяних тріщин Європи.

### Розв'язок

Якщо припустити, що висота гейзерів набагато менша за радіус супутника, то початкова швидкість становить  $v = \frac{4h}{t} = 23 \text{ м/с}$ , а прискорення вільного падіння можна розрахувати як

$$g = G \frac{M}{R^2} = \frac{8h}{t^2} \rightarrow M = \frac{8hR^2}{Gt^2} = 4.8 \times 10^{22} \text{ кг.}$$

**3 Київські годинники.** В астрономічній обсерваторії в Києві поруч на стіні висять два досить точних механічних маятникових годинники. Один з годинників показує середній поясний час для Києва, другий – місцевий зоряний час. Знайти відношення довжин маятників цих годинників. Довгота обсерваторії:  $02^{\text{h}} 02^{\text{m}} 02^{\text{s}}$  (від Гринвіча).

### Розв'язок

Період коливання маятника  $T$  визначається через його довжину  $L$  за формулою

$$T = 2\pi (L/g)^{1/2}. \text{ Отже відношення довжин маятників } L_1 : L_2 = (T_1 : T_2)^2. \text{ Оскільки в умові}$$

говориться про сонячний та зоряний годинники, то замість 1 та 2 введемо позначення С та З відповідно.

Швидкість ходу сонячного годинника не залежить від довготи місця його розташування.

За один рік зоряний час випереджає сонячний рівно на одну зоряну добу. Отже:

$$T_C : T_Z = 366.2422/365.2422 = 1.00274. \text{ Відповідно } L_C : L_Z = 1.00548.$$

**4. Суперземлі.** На графіку нанесено 10 найбільш придатних до життя з точки зору розрахованої температури поверхні знайдених до цього часу екзопланет – суперземель. На графіку по осі *X* відкладена їх маса в масах Землі, а по осі *Y* радіус в радіусах Землі. Важливим критерієм існування стабільної атмосфери на планеті є умова, аби теплові швидкості молекул не перевищували другу космічну швидкість на поверхні планети. Визначте, для яких суперземель дана умова виконується? Прийміть, що температура поверхні на всіх планетах однакова і дорівнює 300 К, а маса атмосферних молекул  $5 \cdot 10^{-26}$  кг. Ще одним критерієм, який визначає придатність до життя на екзопланеті є прискорення вільного падіння, що має знаходитися в інтервалі від **0,5g** до **1,3g** (тут **g** – прискорення вільного падіння на Землі). Нанесіть даний інтервал прискорень вільного падіння на графік та визначте, які екзопланети у нього потрапляють.

### Розв'язок

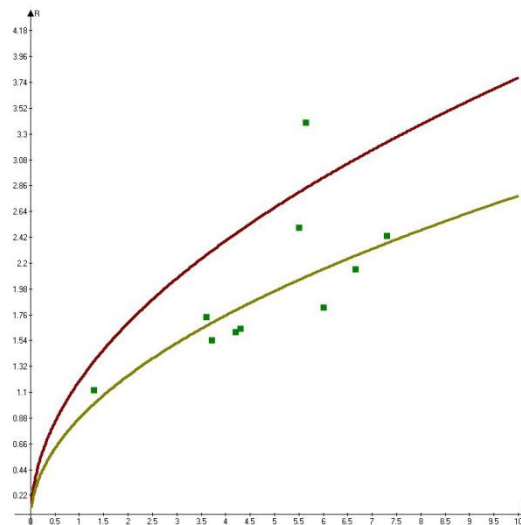
Аби атмосфера на планеті утримувалась протягом тривалого часу має виконуватись умова

$$\frac{3kT}{m} < \frac{2GM}{R} \rightarrow \frac{M}{M_{\oplus}} > \frac{3kTR_{\oplus}}{2GmM_{\oplus}} \frac{R}{R_{\oplus}} = 2 \times 10^{-3} \frac{R}{R_{\oplus}}, \text{ що дійсна для усіх планет! Щодо прискорення}$$

вільного падіння, то  $\frac{g}{g_{\oplus}} = \frac{M}{M_{\oplus}} \left(\frac{R_{\oplus}}{R}\right)^2$ . Для життя придатні планети, які знаходяться між гілками

червоною та жовтою кривих: Kepler – 438b, HD85512b, GL 581c, GL 163c.

Екзопланета	M	R	g
GL 667 Cc	3,71	1,54	1,56
Gl 667 Cd	5,65	3,40	0,49
GL 581 c	5,50	2,50	0,88
GL 163 c	7,30	2,43	1,24
Kepler-62 e	4,20	1,61	1,62
Kepler-283 c	6,00	1,82	1,81
Kepler-61 b	6,66	2,15	1,44
Kepler-438b	1,30	1,12	1,04
Wolf 1061c	4,30	1,64	1,60
HD 85512b	3,60	1,74	1,19



**5 Астероїди.** Два невеликих астероїди однакового розміру, форми та однакового хімічного складу знаходяться на однакових колових орбітах навколо Сонця. Навколо власної осі астероїди обертаються в протилежних напрямках з однаковим періодом, причому їх вісі обертання перпендикулярні до площин орбіти.

Як та чому має змінюватися орбіта першого астероїда по відношенню до орбіти другого протягом тривалого часу, якщо вважати, що на кожен астероїд діє лише гравітація Сонця та випромінювання Сонця?

### **Розв'язок.**

Якби на ці тіла діяла лише гравітація Сонця, то орбіти обох тіл були б незмінними. Тому зміни може викликати лише сонячне випромінювання. Безпосередній тиск сонячного випромінювання на освітлювані поверхні тіл буде діяти однаково. Такий тиск може трохи впливати на орбіти, але до відносних змін орбіт не приведе. Механізм відносних змін в орбітах може викликатися двома процесами:

1. Під дією сонячного випромінювання з поверхонь астероїдів можуть вилітати молекули речовини чи пилінки. Сонячне світло падає на поверхню астероїдів перпендикулярно до вектора їхньої орбітальної швидкості. Від падіння випромінювання на поверхню тіла до моменту вильоту речовини проходить певний час. За це час кожне тіло повернеться навколо осі на певний кут, але в різних напрямках. Тому виліт речовини з поверхонь тіл буде відбуватися під різними кутами до вектора орбітальної швидкості. Оскільки 1-ше тіло обертається проти годинникової стрілки, то швидкість вильоту речовини з його поверхні буде направлена переважно проти орбітальної швидкості, надаючи тілу певний імпульс в напрямку орбітального руху. Отже в цьому випадку орбітальна швидкість, а отже й велика піввісь орбіти буде збільшуватись. Аналогічні міркування показують, що велика піввісь орбіти 2-го тіла буде зменшуватись. Подібний механізм діє на орбіти комет.

2. Освітлена Сонцем, тобто нагріта частина поверхні астероїда, як і будь яке нагріте тіло, має випромінювати власні кванти. В принципі, випромінює вся поверхня астероїда, але потік власних квантів з освітленої Сонцем, тобто більш нагрітої частини поверхні буде максимальним. Кванти, що вилітають будуть надавати тілу додатковий імпульс в напрямку, прилежному швидкості їхнього вильоту. Від моменту падіння сонячного світла на тіло до моменту вильоту власних квантів також проходить певний час. Такий механізм буде діяти аналогічно першому, тільки з меншою силою. Велика піввісь орбіти 1-го тіла буде збільшуватись, 2-го зменшуватись. Даний ефект носить назву ефекту Ярковського.

Оскільки якісно обидва варіанти діють однаково, то в цілому велика піввісь орбіти 1-го тіла буде поступово збільшуватись порівняно з великою піввіссю орбіти 2-го тіла.

**KIC 9832227.** Зоря KIC 9832227 є тісною затемнювано-подвійною змінною зорею типу W UMa і має видиму зоряну величину  $12.3^m$ . Період обертання цієї подвійної складає близько 11 годин і система, фактично, є контактною. Відстань до системи складає близько 500 пк. Розрахунки показують, що ця система скоро зіллється і спалахне як яскрава червона нова (LRN - luminous red nova). За деякими оцінками це може трапитися в 2022 році. Яскраві червоні нові (LRN) є більш яскравими ніж класичні нові зорі, але менш яскраві у порівнянні з надновими: їх абсолютна зоряна величина може сягати  $-12^m$ . Чи зможемо ми побачити це явище неозброєним оком і з якими відомими Вам об'єктами на небі можна порівняти цей спалах?

### Розв'язок

Абсолютна зоряна величина червоної нової  $M=-12$ , відстань до неї  $r=500$  пк, видима зоряна величина буде складати:

$$m = M - 5 + 5 \lg r$$

Підставивши параметри отримаємо  $m=-3.5$ , що буде порівняно з Венерою

**3 Київські годинники.** В астрономічній обсерваторії в Києві поруч на стіні висять два досить точних механічних маятникових годинники. Один з годинників показує середній поясний час для Києва, другий – місцевий зоряний час. Знайти відношення довжин маятників цих годинників. Довгота обсерваторії:  $02^h 02^m 02^s$  (від Гринвіча).

### Розв'язок

Період коливання маятника  $T$  визначається через його довжину  $L$  за формулою

$T = 2\pi (L/g)^{1/2}$ . Отже відношення довжин маятників  $L_1 : L_2 = (T_1 : T_2)^2$ . Оскільки в умові говориться про сонячний та зоряний годинники, то замість 1 та 2 введемо позначення С та З відповідно.

Швидкість ходу сонячного годинника не залежить від довготи місця його розташування.

За один рік зоряний час випереджає сонячний рівно на одну зоряну добу. Отже:

$$T_C : T_Z = 366.2422/365.2422 = 1.00274. \text{ Відповідно } L_C : L_Z = 1.00548.$$

**2. Земля із Сатурна.** Чи можна побачити Землю неозброєним оком з космічного апарата, що обертається навколо Сатурна?

### Розв'язок

Оскільки відстань від Землі до Сонця приблизно 1 а.о., а від Сонця до Сатурна 9.5 а.о., тому Земля ніколи не віддаляється від Сонця на кут більший  $6^\circ$ . Побачити Землю не просто у променях Сонця, але якщо диск Сонця буде затулений Сатурном чи його супутниками, то можна спостерігати Землю поблизу Сонця. Оцінити видиму зоряну величину Землі можна наступним чином.

Від Землі відбивається наступна кількість сонячної енергії  $A\pi R^2 f$ , де  $A$  – альbedo Землі,  $R$  - радіус Землі,  $f$  - сонячна стала.

Будемо вважати, що при певних ракурсних умовах зі Сатурна видно майже повний диск Землі (сполучення), відстань між Сатурном та Землею у такому випадку  $r = 10.5$  а.о. Тоді видима зоряна величина Землі при порівнянні з сонячною буде наступна:

$$m = m_s + \frac{2.5 \lg(2r^2)}{AR^2}$$

Підставивши видиму зоряну величину Сонця  $m_s$  розрахуємо  $m \approx 2$ .

Якщо з Сатурна видно лише половину диска Землі, то потік випромінювання від Землі буде вдвічі менше, і видима зоряна величина буде дещо більшою. Але у будь разі Землю можна буде помітити неозброєним оком.

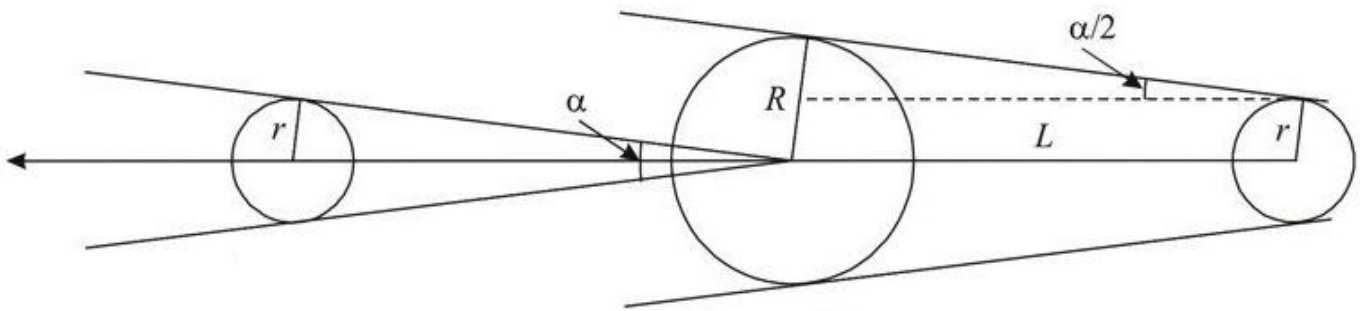
Окрім того Місяць буде не розділятися з Землею і дещо зменшить видиму зоряну (але на малу величину).

Інший варіант розв'язку, порівняння з видимою зоряною величиною Місяця. Знаючи розміри, альbedo Місяця та відстань від нього до Землі можна оцінити видиму зоряну величину Землі.

**4. Супутник.** Деяка планета, радіус якої дорівнює діаметру Землі, обертається по коловій орбіті навколо далекої зорі. Дана планета має супутник, орбіта якого також колова. Під час затемнення зорі супутником при спостереженні з планети видимі кутові розміри зорі і супутника співпадають. Знайдіть всі можливі лінійні розміри супутника, аби на цій планеті можна було б спостерігати повне затемнення супутника в тіні планети.

### Розв'язок

На рисунку наведено критичний випадок, коли супутник як раз повністю потрапляє у тінь планети. Стрілочкою вказаний напрямок на зорю. Позначемо  $R$ ,  $r$  – розміри планети та супутника відповідно,  $L$  – радіус орбіти супутника. Видимі розміри зорі, як і супутника, будуть становити  $\alpha = \frac{2r}{L} \rightarrow L = 2\alpha r$ . Кут розвору тіні від планети буде майже таким самим, адже відстань до зорі набагато більша ніж до супутника. Тоді  $L = \alpha R = 2\alpha r \rightarrow r = \frac{R}{2} = R_{\oplus}$ . Отже, при  $r \leq R_{\oplus}$ .





**5 Астероїди.** Два невеликих астероїди однакового розміру, форми та однакового хімічного складу знаходяться на однакових колових орбітах навколо Сонця. Навколо власної осі астероїди обертаються в протилежних напрямках з однаковим періодом, причому їх вісі обертання перпендикулярні до площин орбіти.

Як та чому має змінюватися орбіта першого астероїда по відношенню до орбіти другого протягом тривалого часу, якщо вважати, що на кожен астероїд діє лише гравітація Сонця та випромінювання Сонця?

#### **Розв'язок.**

Якби на ці тіла діяла лише гравітація Сонця, то орбіти обох тіл були б незмінними. Тому зміни може викликати лише сонячне випромінювання. Безпосередній тиск сонячного випромінювання на освітлювані поверхні тіл буде діяти однаково. Такий тиск може трохи впливати на орбіти, але до відносних змін орбіт не приведе. Механізм відносних змін в орбітах може викликатися двома процесами:

1. Під дією сонячного випромінювання з поверхонь астероїдів можуть вилітати молекули речовини чи пилінки. Сонячне світло падає на поверхню астероїдів перпендикулярно до вектора їхньої орбітальної швидкості. Від падіння випромінювання на поверхню тіла до моменту вильоту речовини проходить певний час. За це час кожне тіло повернеться навколо осі на певний кут, але в різних напрямках. Тому виліт речовини з поверхонь тіл буде відбуватися під різними кутами до вектора орбітальної швидкості. Оскільки 1-ше тіло обертається проти годинникової стрілки, то швидкість вильоту речовини з його поверхні буде направлена переважно проти орбітальної швидкості, надаючи тілу певний імпульс в напрямку орбітального руху. Отже в цьому випадку орбітальна швидкість, а отже й велика піввісь орбіти буде збільшуватись. Аналогічні міркування показують, що велика піввісь орбіти 2-го тіла буде зменшуватись. Подібний механізм діє на орбіти комет.

2. Освітлена Сонцем, тобто нагріта частина поверхні астероїда, як і будь яке нагріте тіло, має випромінювати власні кванти. В принципі, випромінює вся поверхня астероїда, але потік власних квантів з освітленої Сонцем, тобто більш нагрітої частини поверхні буде максимальним. Кванти, що вилітають будуть надавати тілу додатковий імпульс в напрямку, прилежному швидкості їхнього вильоту. Від моменту падіння сонячного світла на тіло до моменту вильоту власних квантів також проходить певний час. Такий механізм буде діяти аналогічно першому, тільки з меншою силою. Велика піввісь орбіти 1-го тіла буде збільшуватись, 2-го зменшуватись. Даний ефект носить назву ефекту Ярковського.

Оскільки якісно обидва варіанти діють однаково, то в цілому велика піввісь орбіти 1-го тіла буде поступово збільшуватись порівняно з великою піввіссю орбіти 2-го тіла.