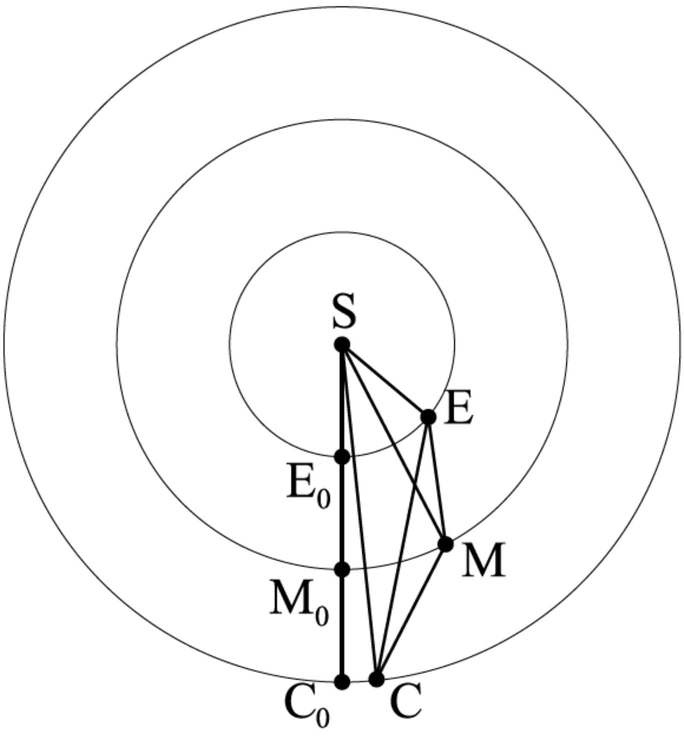
ІІІ етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з астрономії
Київ, 8.02.2018
10 клас

1. *Знайти кут між видимими положеннями на небі Сатурна і Марса через 30 діб після одночасного протистояння обох планет із Землею. Вважати, що колові орбіти всіх планети лежать в одній площині.*

Увага! Розв'язок задачі дуже чутливий до вхідних умов та заокруглень на кожному з етапів.

Положення планет у момент протистояння (E_0, M_0, C_0) та через час $t = 30$ діб (E, M, C) зображені на рисунку (розміри орбіт та кути наведені не в масштабі!).



Розрахуємо на які кути змістяться Земля, Марс та Сатурн за цей час. $\angle E_0SE = \frac{30}{365.24} * 360^o = 29{,}57^o$; $\angle M_0SM = \frac{30}{686{,}98} * 360 = 15.72^o$; $\angle C_0SC = \frac{30}{10\,759{,}22} * 360 = 1{,}00^o$. Знайдемо сторони трикутника ΔCEM, аби потім за теоремою косинусів отримати кут $\angle CEM$. За теоремою косинусів для $\Delta CSE, \Delta CSM, \Delta MSE$ маємо:

$$EC^2 = SE^2 + SC^2 - 2\,SE\,SC\,\cos\angle CSE = 75{,}25\ a.o.^2$$

$$MC^2 = SM^2 + SC^2 - 2\,SM\,SC\,\cos\angle CSM = 65{,}27\ a.o.^2$$

$$EM^2 = SE^2 + SM^2 - 2\,SE\,SM\,\cos\angle MSE = 0{,}36\ a.o.^2$$

$\angle CSE = 29{,}57^o - 1{,}00^o = 28{,}57^o$; $\angle CSM = 15{,}72^o - 1{,}00^o = 14{,}72^o$; $\angle MSE = 29{,}57^o - 15{,}72^o = 13{,}85^o$; $SE = 1\ a.o.$; $SM = 1{,}52\ a.o.$; $SC = 9{,}54\ a.o.$

Отримані значення сторін становлять: $EC = 8{,}675\ a.o.$; $MC = 8{,}08\ a.o.$; $EM = 0{,}60\ a.o.$

Запишемо теорему косинусів для трикутника ΔCEM:

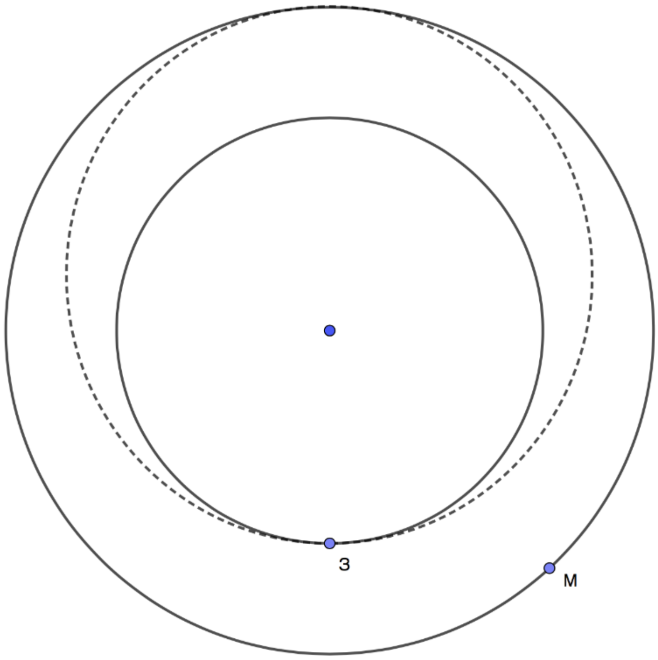
$$MC^2 = EC^2 + EM^2 - 2\,EC\,EM\,\cos\angle CEM$$

$$\cos\angle CEM = \frac{EC^2 + EM^2 - MC^2}{2\,EC\,EM} = \frac{75{,}25 + 0{,}36 - 65{,}29}{2 * 8{,}675 * 0{,}60} = 0.9913$$

Звідки отримаємо кінцеву відповідь:

$$\angle CEM = \arccos\ 0{,}9933 \ \approx 7{,}6^o$$

2. *Космічний корабель запускають до Марса для польоту по гоманівській траєкторії (гоманівська траєкторія – найбільш енергетично вигідна траєкторія, перигелій якої знаходиться на орбіті Землі, а афелій – на орбіті Марса). Позначте приблизні положення Землі та Марса на їхніх орбітах в момент старту корабля. Наведіть розрахунки цих положень. Орбіти планет вважати коловими!*



Рухаючись по гоманівській траєкторії корабель у перигелії своєї орбіти буде знаходитись на орбіті Землі, а в афелії поблизу Марса, тому велика піввісь буде відповідати середньому арифметичному радіусів орбіт обох планет. Згідно з ІІІ-м законом Кеплера розрахуємо час польоту до Марса – $t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}(\frac{a_{\oplus} + a_M}{2})^{3/2} = 0.71$ року. За такий час Марс переміститься по орбіті на кут $360^{\circ} * \frac{t}{T_M} = 360^{\circ} * \frac{0.71}{1.88} \approx 136^{\circ}$.

3. *Через який час зійде Сонце у Вінніпегу (50° пн. ш. 97° зх. д.) після його сходу у Києві (50° пн.ш., 30°.5 сх.д.)? Вважати, що спостереження проводяться на однаковій висоті над рівнем моря, рефракція в горизонті для обох міст однакова.*

Так як міста знаходяться на одній широті, то Сонце зійде у Вінніпегу через інтервал часу $24^h * \frac{97° + 30°.5}{360°} = 8^h 30^m$. За 8,5 год пряме сходження Сонця зросте приблизно на 1/3 кут град, або $1^m 20^s$, тобто схід Сонця відбудеться через приблизно 8 год 31 хвилину

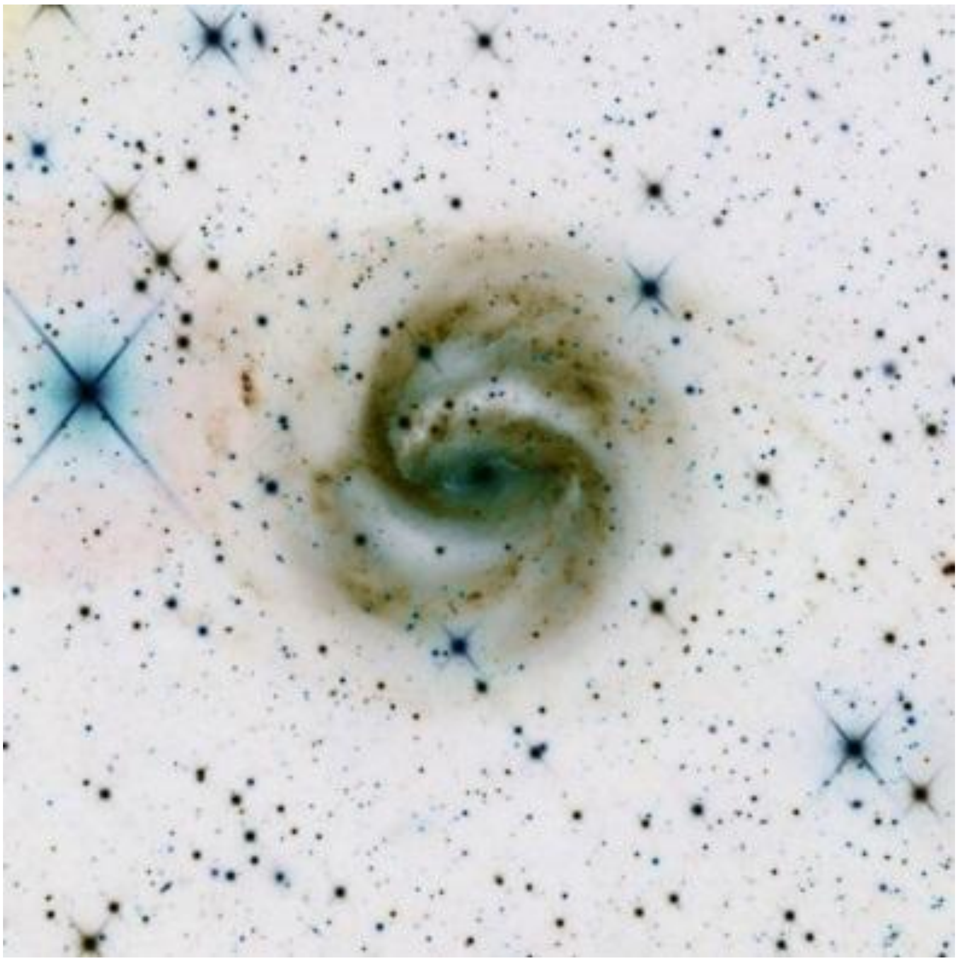
4. *Визначте діапазон швидкостей, з якими метеоритні тіла, що належать до Сонячної системи, падають на Місяць. Зміну швидкості метеороїда в гравітаційному полі Місяця можна не враховувати. Орбіти Землі та Місяця вважати коловими.*

Якщо не враховувати гравітаційну дії самого Місяця, то мінімальна швидкість метеороїда буде, очевидно, рівна нулеві. Максимальне значення буде відповідати випадку руху тіла по параболі у протилежному напрямку до руху Місяця у даний момент :

$$v_{max} = \left(1+\sqrt{2}\right)v_{\oplus} + v_{\text{Місяця}} \approx (72+1)\,\frac{\text{км}}{\text{с}} \approx 73\,\frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

5. *Оцінити відстань до галактики зображеної на рисунку, якщо її розміри порівняні з розмірами нашої Галактики. Кутові розміри ділянки неба зображеного на рисунку 5′ x 5′ (кутових мінут).*

Будемо вважати, що галактика має кругову форму, але внаслідок проекції на площину зору ми бачимо її дещо еліптичною. За фотографією можна виміряти її кутову велику піввісь. Лінійний радіус галактики можна оцінити як 15 кпк, а її кутовий розмір $\theta = \frac{8}{15} * 5' * \frac{60}{206265}$, тоді відстань до неї буде становити $d = \frac{15\ \text{кпк}}{\theta} \approx 20$ Мпк .



11 клас

1. *Знайти кут між видимими положеннями на небі Сатурна і Марса через 30 діб після одночасного протистояння обох планет із Землею. Вважати, що всі планети лежать в одній площині.*

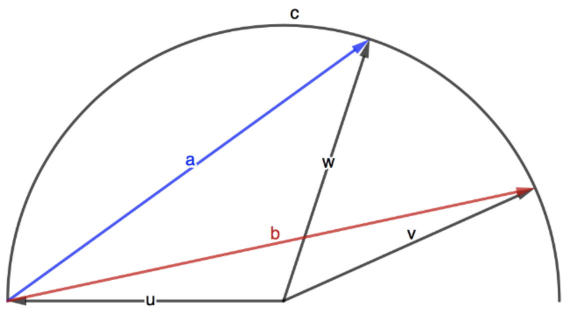
   Див. задачу 10.1 .

2. *Чи належить довгоперіодична комета, перигелій орбіти якої знаходиться на орбіті Юпітера та яка має ексцентриситет орбіти 0.9998, до хмари Оорта? Вважати, що комета належить до хмари Оорта у тому випадку, коли вона віддаляється від Сонця на відстань більшу, ніж світловий рік.*

З геометричних міркувань афелій орбіти такої комети буде знаходитись на відстані $Q = a(1 + e) = q * \frac{1+e}{1-e} = a_{Ю} * \frac{1+e}{1-e} \approx 52 * 10^3$ а.о. ≈ 0.25пк ≈ 0.82 світлового року → ні, не належить.

3. *В якому напрямку і з якою швидкістю повинен Котигорошко кинути булаву, щоб вона повернулася до Землі через пів року?*

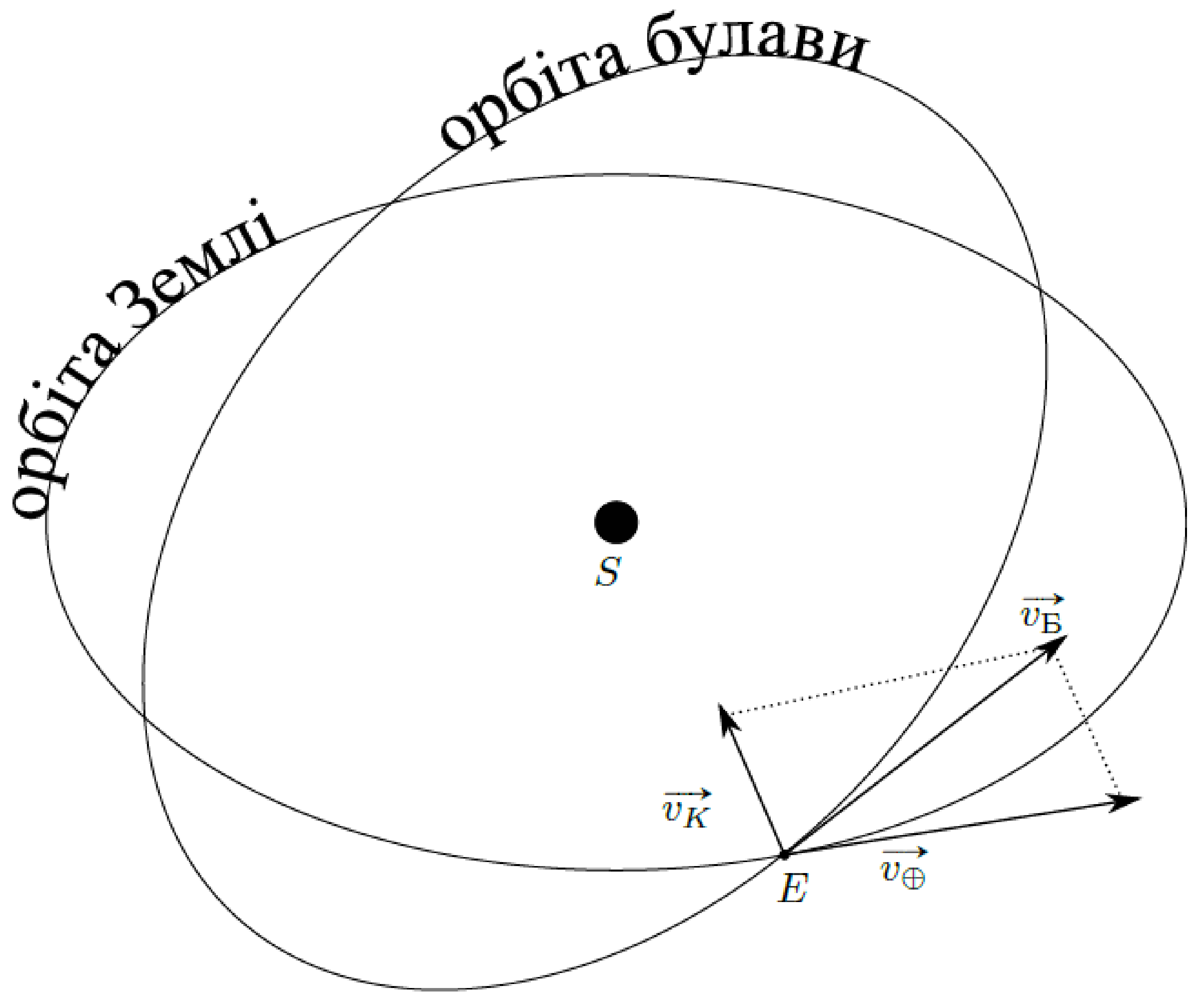
Задача має безліч розв'язків! Для того аби булава повернулась рівно через пів року достатньо покласти умову, що вона буде рухатися коловою орбітою з радіусом в 1 а.о. Тобто, розвязками будуть всі колові орбіти в площинах, що отримуються поворотом площини Землі на довільний ненульовий кут навколо осі Земля-Сонце.



На рисунку зображено вектор **u** – швидкість руху Землі, вектори **a** та **b** – швидкості булави в момент кидка, виправлені на врахування втрати кінетичної енергії при виході з гравітаційного поля Землі $a^2 = a^2_o - a^2_{II3}$ та результуючі вектори **v** та **w**, за модулем рівні вектору **u**. Видно, що червоний та синій вектори задовольняють умові задачі. Мінімальна швидкість 0+ε відповідає мінімальному куту напрямку швидкості булави 90^{o} +δ відносно напрямку швидкості Землі на орбіті.

Максимальну швидкість булаві необхідно буде надати у випадку, коли булава має рухатись по коловій орбіті Землі, але у протилежному напрямку. Тому Котигорошко має її кинути таким чином, щоб вона, вийшовши з дії гравітаційного поля Землі, досягла швидкості рівної швидкості руху Землі по орбіті. Отже, швидкість має становити $\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}^2_{\mathrm{II}\oplus} + (2\mathrm{v}_{\oplus})^2} = \sqrt{11.2^2 + (2 * 29.8)^2} \approx 60{,}6$ км/с у протилежному до напрямку руху Землі.

Додаткове пояснення: Булава летить по тій самій орбіті, що й Земля, але ця орбіта повернута на певний кут. v_к - швидкість, що надає Котигорошко, v_Б - результуюча швидкість булави, яка по модулю рівня швидкості Землі. Тоді через півроку вони зустрінуться у діаметрально протилежній точці



4. *Відомо, що найяскравіші наднові (гіпернові) у максимумі блиску досягають абсолютної зоряної величини* $M = -21$ *. Як часто будуть реєструватися спалахи наднових, якщо спостереження проводитимуть по всьому небу до граничної зоряної величини* $m = 14$ *? Вважайте, що в типовій галактиці спалах наднової відбувається в середньому раз на 100 років, а самі галактики розподілені у просторі з концентрацією 1 галактика на 10 Мпк*^{3} *. Міжзоряним і міжгалактичним поглинанням знехтувати.*

Варіант 1

Абсолютною зоряною величиною умовно позначають видиму зоряну величину тіла з відстані в 10 пк. Згідно з формулою Погсона $m - M = -2.5\log\frac{E}{E_{10}} = 5\log\frac{r}{10} = 5\log r - 5$. Звідки максимальна відстань, на якій можна ще помітити наднову становить $r = 10^{0.2(m+5-M)} = 10^{0.2(14+5+21)} = 10^8$пк. Що відповідає кількості галактик:

$$Vn = \frac{4}{3}\pi n r^3 = \frac{4}{3}\frac{\pi}{10}\left(\frac{10^8}{10^6}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi * 10^5.$$

Таким чином, астрономи формально мають можливість спостерігати $\frac{4}{3}\pi\frac{10^5}{100} \approx 4200$ наднових щороку.

Варіант 2

З означення абсолютної зоряної величини знаходимо граничну відстань r, до якої ще можна буде реєструвати спалахи:

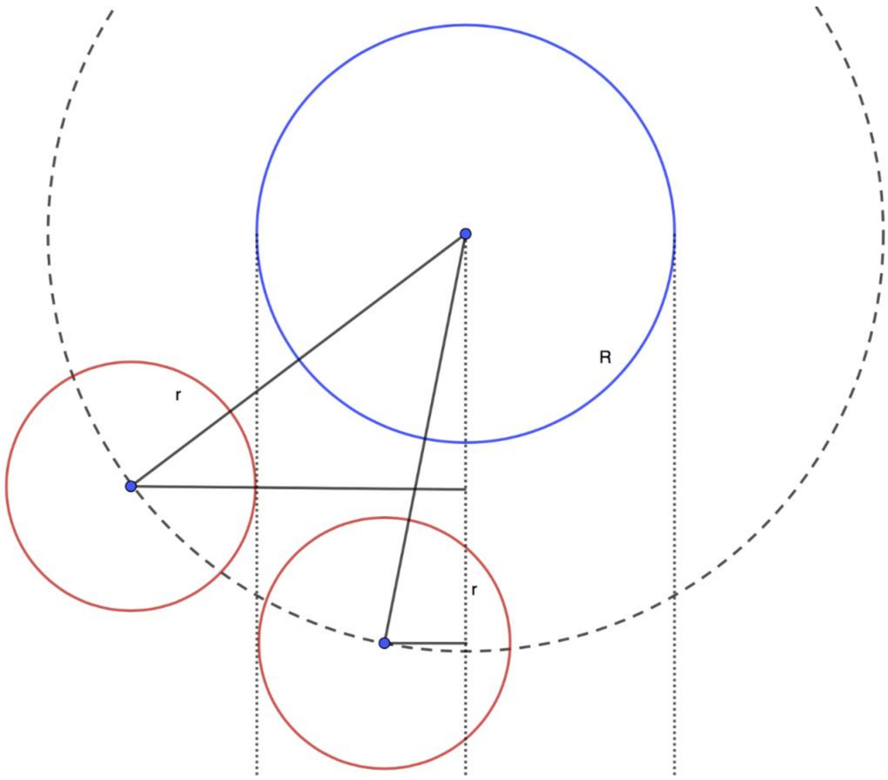
$$M = m + 5 - 5\log r$$

$$\log r = \frac{M - m - 5}{-5} = \frac{-21 - 14 - 5}{-5} = \frac{-40}{-5} = 8$$

$$r = 10^8 \text{ пк} = 100 \text{ Мпк}$$

Об'єм цієї області складатиме $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4 \cdot 10^6$ Мпк^3 , а кількість галактик, що потрапили у цю область рівна $V/(10\ \text{Мпк}^3) = 4 \cdot 10^6\ \text{Мпк}^3/(10\ \text{Мпк}^3\ ) = 4 \cdot 10^5$. Оскільки для однієї галактики спалах відбувається раз на 100 років, то на Землі щорічно реєструватимуть 4000 спалахів – тобто 11 спалахів кожної доби.

5. *На графіку показана крива блиску подвійної системи площина орбіти якої лежить в площині променя зору. Відомо, що обидві зорі обертаються по колових орбітах на відстані 0,013 а.о. одна від одної. Загальна маса системи 1,85 M_c (мас Сонця). Оцінити розміри зір та їх температуру.*



$R = 0.49a = 1.38R_\odot$, $r = 0.29a = 0.81R_\odot$. За глибшим спадом блиску та законом Стефана-Больцмана знайдемо температуру яскравішої зірки: $M_R - M_\odot = -2.5\log(\frac{L_R}{L_\odot}) = -10\log(\frac{T_R}{T_\odot}\sqrt{\frac{R}{R_\odot}}) \to \frac{T_R}{T_\odot} = \sqrt{\frac{R_\odot}{R}}10^{0.1(M_\odot - M_R)} = 1.50$. Отже, $T_R = 8700\,K$. Для загальної абсолютної зоряної величини отримаємо (можна також розглядати різницю і отримати аналогічну відповідь): $M_\odot - M_\Sigma = 2.5\log(\frac{L_R + L_r}{L_\odot}) = 2.5\log(10^{0.4(M_\odot - M_R)} + \frac{r^2T_r^4}{R_\odot^2T_\odot^4}) \to 10^{0.4(M_\odot - M_R)} + \frac{r^2T_r^4}{R_\odot^2T_\odot^4} = 10^{0.4(M_\odot - M_\Sigma)} \to \frac{r^2T_r^4}{R_\odot^2T_\odot^4} = 10^{0.4(M_\odot - M_\Sigma)} - 10^{0.4(M_\odot - M_R)} \approx 0.09$. Остаточно $\frac{T_r}{T_\odot} = 0.61 \to T_r = 3500\,K$.

Згідно з III-м законом Кеплера період обертання системи буде становити $t = \sqrt{\frac{a^3}{M}} \approx$ 9,55 год. Такий самий результат можна отримати також із графіка, якщо подвоїти час між моментами початку взаємних затемнень зірок! Перейдемо в систему відліку, в якій одна з зір є нерухомою. З схематичного рисунку знайдемо рівняння для знаходження радіусів обох зір: $R + r = a * \sin\left(2\pi\frac{1.37}{9.55}\right) = 0.78a$, $R - r = a * \sin\left(2\pi\frac{0.30}{9.55}\right) = 0.20a \to$