II етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з фізики

Київ, 15.12.2018

Можливі розв'язки завдань

7 клас

1. *Оцініть максимальну довжину лінії, яку може залишити твердий "простий" олівець на папері, якщо відомо, що грифель є циліндром радіусом 1 мм і висотою 20 см, а товщина лінії стала і дорівнює 6 нм.*

Примітка: об'єм V циліндра розраховується за формулою $V = \pi r^2 h$, де r – радіус циліндра, h – його висота, $\pi \approx 3,14$.

Максимальна довжина лінії досягається, якщо списати весь олівець не відриваючи його від паперу. В такому випадку початкова маса грифеля буде дорівнювати масі графіту, що залишився у вигляді лінії на папері. Оскільки на аркуші густина речовини грифеля не змінюється, то об'єм грифеля дорівнює об'єму «лінії» з графіту. Об'єм грифеля – це площа його поперечного перерізу, помножена на висоту. Об'єм «лінії» з графіту – це ширина лінії (діаметр грифеля), помножена на її товщину та довжину.

Нехай $r_{грифеля}$, $h_{грифеля}$, $d_{шару}$, $L_{шару}$ – радіус грифеля, висота грифеля, товщина лінії та її довжина відповідно. Тоді:

$$\pi\, r_{грифеля}^2\, h_{грифеля} = 2\, r_{грифеля}\, d_{шару}\, L_{шару}, \text{ звідки}$$

$$L_{\text{шару}} = \frac{\pi\, r_{\text{грифеля}} h_{\text{грифеля}}}{2\, d_{\text{шару}}} \approx 52{,}3 \textit{ км}$$

2. *Щоранку дівчинка вигулює собаку. Оскільки собака любить бігати, дівчинка завжди бере на прогулянку іграшку, яку кидає перед собою, а собака біжить і приносить іграшку господині. При цьому дівчинка йде вперед, і, як тільки собака принесе іграшку, знову кидає її. За час прогулянки дівчинка проходить 1500 м, а собака пробігає 6000 м. Скільки разів за прогулянку дівчинка кидає іграшку, якщо іграшка завжди відлітає вперед на 30 м, а дівчинка і собака рухаються з постійними швидкостями.*

За умовою дівчинка і собака рухаються з постійними швидкостями, причому швидкість собаки в *6000 м:1500 м = 4* рази більше. За час між двома послідовними кидками дівчинка й собака сумарно проходять шлях 30 м × 2 = 60 м. За цей час дівчинка проходить шлях $\frac{1}{1+4} \cdot$ 60 м = 12 м (можна скласти рівняння: якщо шлях дівчинки між кидками позначити *x м*, то шлях собаки буде дорівнює *(60 – x) м*, і за умовою $\frac{60-x}{x} = 4$, звідки $x = 12$). Отже, за прогулянку дівчинка встигає *1500 м : 12 м = 125 раз* кинути іграшку.

Відповідь: 125 раз.

3. *Брус з квадратним перетином L×L (L = 0,5 м) піднімають вгору зі швидкістю υ = 2 см/с у посудині з водою (рис. 1). Перетин посудини також квадратний, а зазори між брусом і стінками посудини d = 5 мм. З якою швидкістю (в см/с) опускається рівень води в зазорі? Чи зміниться відповідь, якщо брус буде посунутий до однієї з стінок посудини?*

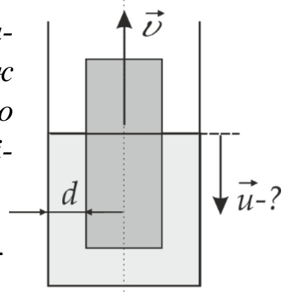

Рис. 1

Сумарний об'єм води залишається незмінним. Якщо брус за час t піднімається на висоту h, то знизу додається об'єм $h \cdot S_o$, де $S_o = L^2$. Згори ж додається вода з зазору, об’єм якої $H(S - S_0)$, де $S = (L + 2d)^2$ – площа перетину бака, а ΔH зміна висоти рівня води в зазорі. Звідси отримуємо:

$$H = \frac{h \cdot S_0}{S - S_0}.$$

Оскільки $\frac{h}{t} = v$ а $\frac{\Delta H}{t} = u$, то маємо $\frac{vL^2}{4d(L+d)} \cong \frac{vL}{4d} = 50$ см/с.

Під час зміщення бруса до однієї зі стінок форма перетину зазору зміниться, проте площа перетину залишиться такою самою. Отже, попередній розв’язок залишається таким самим.

4. *Школярі поверталися додому з екскурсії до музею на автобусах. Автобуси їхали зі швидкістю $v_1 = 70$ км/год. Пішов дощ, і водії знизили швидкість до $v_2 = 50$ км/год. Коли дощ скінчився, автобуси знову поїхали з колишньою швидкістю і в'їхали на подвір’я школи на 10 хвилин пізніше, ніж було заплановано. Скільки часу йшов дощ?*

Зробимо рисунок 2 і позначимо: *M* – музей; *S* – школа; *AB* – ділянка, яку автобус проїхав під дощем за час *t*; *AC* – ділянка, яку проїхав би автобус за той же час *t*, якби не було дощу.

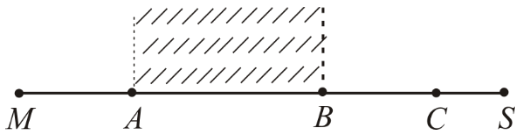

Рис. 2

Зрозуміло, що $BC = AC - AB = (v_1 - v_2)t$. З іншого боку, автобус пройшов шлях $MA + AB + CS$ за такий самий час, за який було заплановано проїхати весь шлях *MS*. Отже, $BC = v_1\Delta t$, де $\Delta t = 10$ хвилин – час, на яке запізнилися автобуси. Прирівнюючи отримані вирази, маємо: $(v_1 - v_2)t = v_1\Delta t$, звідки $t = v_1\Delta t/(v_1 - v_2)$.

5. *Під час тренування двоє пожежників бігають протягом 15 хвилин туди й назад з пункту A в пункт B. Рух починають одночасно з порожніми відрами з пункту A. Потім в пункті B набирають воду й біжать назад в пункт A де виливають її. Відстань між пунктами A і B дорівнює 18 метрів. Швидкість одного пожежного 3 м/с, а швидкість другого 2 м/с. Якщо вважати, що вони бігають з постійною за величиною швидкістю не витрачаючи час на заповнення та спустошення відер, визначте 1) скільки разів вони зустрінуться, 2) скільки разів пожежники зустрінуться з повними відрами.*

Побудуємо графіки руху пожежників. Суцільними лініями зображено рух від *A* до *B* з порожніми відрами, а пунктирними від *B* до *A* з повними відрами. З рисунка видно, що через *36 с* ситуація почне повторюватися, тому досить розглянути рух на цьому відрізку часу. За *36 с* вони зустрінуться п'ять разів, це місця перетину прямих, і тільки один раз з повними відрами в пункті *A*, коли будуть виливати воду. За *15 хв* або *900 с* ситуація повториться *900/36 = 25* разів. Тоді робимо висновок: *5 · 25 = 125* разів вони зустрінуться, *5 · 5 = 25* разів вони зустрінуться з повними відрами.

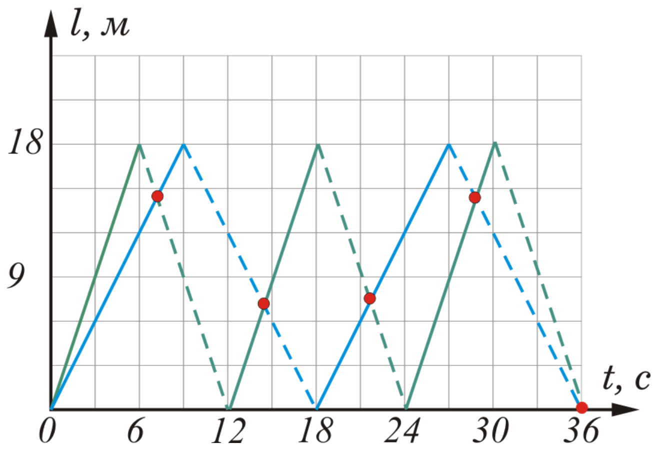

Рис. 3

8 клас

1. *Автомобілі довжиною d = 5 м рухаються зі швидкістю υ_1 = 90 км/год з інтервалом L_1 = 30 м в першому ряду та зі швидкістю υ_2 = 60 км/год і з інтервалом L_2 = 10 м в другому (див. рис. 4). На деякій ділянці вони перебудовуються в загальний ряд. З якою найменшою однаковою для всіх швидкістю вони можуть рухатися в загальному ряду?*

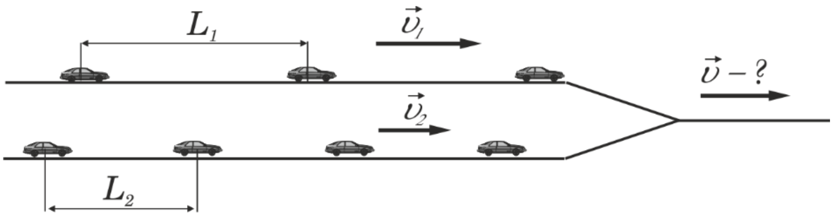

Рис. 4

За час t з першого ряду в загальний перейде $\frac{\vartheta_1\, t}{L_1}$, а з другого – $\frac{\vartheta_2\, t}{L_2}$ машин. Мінімальна швидкість в загальному ряду буде за умови, коли машини рухаються впритул одна до одної. Тоді повна довжина отриманого за час t загального ряду $L = \left(\frac{\vartheta_1\, t}{L_1} + \frac{\vartheta_2\, t}{L_2}\right) d$, формувався він час t і мінімальна швидкість загального ряду $\vartheta_{min} = \frac{L}{t} = \left(\frac{\vartheta_1}{L_1} + \frac{\vartheta_2}{L_2}\right) d = \left(\frac{90}{30} + \frac{60}{10}\right) 5 =$ 45 км/год.

2. *У широку й глибоку посудину з водою поверх неї налитий шар бензину товщиною h = 10 см. Яку густину покаже ареометр масою M = 10 г, занурений в цю посудину? Як зміняться його показання, якщо товщину шару бензину збільшити вдвічі? Вважайте що діаметр ареометра набагато менше діаметра посудини. Густина води 1,0 г/см^3, бензину 0,75 г/см^3, площа поперечного перерізу ареометра 1 см^3.*

Примітка. Прилад для вимірювання густини рідини – ареометр – в найпростішому випадку являє собою циліндричне тіло, в нижній частині якого закріплений вантаж, що забезпечує стійке плавання ареометра в вертикальному положенні, а на бічну поверхню нанесена шкала густини так, що під час плавання ареометра в однорідній рідині він занурюється точно до позначки, яка відповідає його густині.

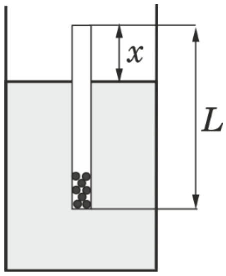

Рис. 5

Введемо позначення L – довжина ареометра, x – висота, на яку він виступає над поверхнею рідини, S – площа його поперечного перерізу. Тоді при зануренні в однорідну рідину густиною ρ має місце очевидне співвідношення, $M = \rho S(L–x)$ з якого отримуємо співвідношення, що дозволяє градуювати $x_\rho = L - \frac{M}{\rho S}$. Воно фактично визначає, на якій відстані від верхнього краю ареометра повинна бути нанесена позначка, яка відповідає густині ρ.

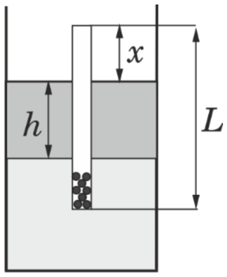

Рис. 6

З цієї формули випливає, що в чистий бензин ареометр занурився б на $L – x$ = *l3 см*, отже, при товщині шару $2h > 13$*см* ареометр плаває тільки в бензині і, природно показує його густину. Якщо ж товщина шару $h < 13$ *см*, то частина ареометра занурена в воду (див. рис.). У цьому випадку умова плавання має вигляд $M = S(\rho_б h + \rho_в(L–h-x_1))$, звідки маємо:

$$x_1 = L - h\left(1 - \frac{\rho_б}{\rho_в}\right) - \frac{M}{\rho S}.$$

В той же час у відповідності до співвідношення градуювання ареометр показує таку густину ρ_x, що $x_1 = L - \frac{M}{\rho_x S}$. Прирівнюючи ці вирази, отримуємо $\rho_x = \rho_в \frac{M}{hS(\rho_в - \rho_б)+M}$. Підставляючи числові значення, маємо $\rho_x = 0,8$ *г/см*^{3}.

3. *Сполучені посудини у формі циліндрів наповнені рідиною з густиною ρ. Площі перетину посудин дорівнюють 2S і 3S. Посудини з'єднані трубкою з перетином S, яка перекрита рухомим поршнем. У посудину з більшим перетином починають обережно підливати додаткову рідину з густиною $2/3\ \rho$. За час T об'єм рідини, яку долили склав V. З якою середньою швидкістю рухався поршень, якщо вважати, що він завжди залишався в трубці, що сполучає посудини? Вважати, що тертя відсутнє й рідини не змішуються.*

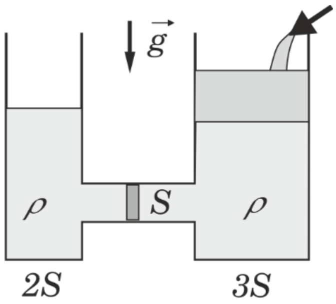

Рис. 7

Рідина перерозподіляється між посудинами так, щоб тиск в однорідній рідині на одному рівні був однаковий, при цьому об'єм рідини з більшою густиною залишається сталим. Позначимо через H зміщення рівня рідини в лівій посудині (з меншим перетином). Тоді в правій посудині рівень рідини з більшою густиною має опуститись на $2/3\ H$. З умови рівності тиску на одному рівні в рідині з більшою густиною випливає, що $\frac{5}{3}H\rho g = \frac{\frac{2}{3}\rho g V}{3S}$, тобто $H = \frac{2}{15}\cdot\frac{V}{S}$. Поршень в трубці переміститься на відстань, вдвічі більшу за підйом рівнів, оскільки площі перетинів різні, тобто на $2H = \frac{4}{15}\cdot\frac{V}{S}$. Його середня швидкість буде дорівнює $\frac{2H}{T} = \frac{4V}{15TS}$.

Простіший варіант розв'язку. Зміна рівнів рідини буде таким самим, якби залили $2/3\cdot V$ рідини з густиною ρ. Залита рідина перерозподілиться в посудинах у співвідношенні *2:3*, тобто в іншу посудину вздовж трубки за час T перетече $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}V$. Шукана швидкість руху поршня $\frac{4V}{15TS}$.

4. *До рухомого невагомого блоку підвішена посудина, яка наповнена водою (рис. 8). До вільного кінця невагомої нитки, що утримує блок, прикріплений динамометр. Коли пробка, яка закриває зливний отвір, що розташований в дні посудини, розчинилася, вода стала повільно рівномірно витікати з посудини. На рисунку 8 представлений графік залежності сили F, яку показує динамометр, від часу t. Визначте масу води, яка витікала з посудини щосекунди. Прискорення вільного падіння вважати g = 10 Н/кг. Тертям у блоці знехтувати.*

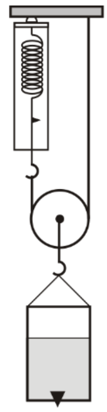
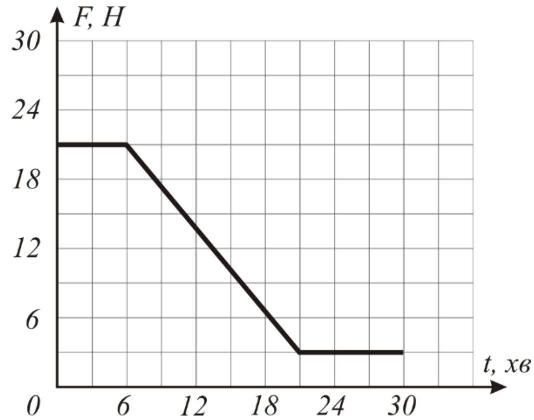

Рис. 8

Очевидно, що вода витікала з посудини протягом часу, коли показання динамометра зменшувалися. До початку розчинення пробки динамометр показував силу $F_1 = 21$ Н. Після того як вся вода витекла, покази динамометра стали $F_2 = 3$ Н. Оскільки рухомий блок дає виграш в силі $n = 2$ рази, то початкова вага посудини разом з водою $P_1 = 42$ Н, а вага порожньої посудини $P_2 = 6$ *Н*. Отже, вага води, що витекла з посудини, $P = 36$ *Н*. Вага води чисельно дорівнює силі тяжіння, що діє на неї: $P = mg$. На підставі проведених міркувань знайдемо масу води, що витекла з посудини: $m = P/g = 3{,}6$ *кг*.

Оскільки вода витікала з посудини протягом інтервалу часу $t = 15$ *хв*, то маса води, яка витікає щосекунди, $m/\Delta t = 4$ *г/с*.

5. *В теплоізольованій посудині знаходиться вода при температурі $t = 60\ ^0C$. Для вимірювання температури води використовують термометр з теплоємністю 10 Дж/К. Визначити помилку вимірювання температури, якщо теплоємність посудини з водою дорівнює 500 Дж/К, початкова температура термометра $20\ ^0C$.*

Помилка під час вимірювання температури виникає внаслідок того, що термометр має власну теплоємність C_1 і його початкова температура t_1 менша за температуру води в посудині t_0. Отже, якась частина теплоти піде на нагрівання термометра, що призведе до зменшення температури води. Нехай температура, що встановилася після того, як у воду опустимо термометр дорівнює $(t_0 - \Delta t)$, тоді рівняння теплового балансу має вигляд:

$$C_0\Delta t = C_1(t_0 - \Delta t - t_1) \rightarrow \ \Delta t = \frac{C_1(t_0 - t_1)}{C_0 + C_1}$$

Ця величина й визначає помилку вимірювання $\Delta t \approx 0{,}8\ ^0C$.

9 клас

1. *Відомо, що першу частину шляху автомобіль їхав зі швидкістю 90 км/год. Визначте швидкість автомобіля на другій частині шляху й середню швидкість на всьому шляху, якщо графік залежності шляху від часу має вигляд двох прямолінійних відрізків (для першої та другої частин) (рис. 9).*

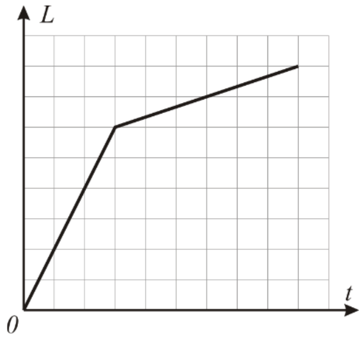

Рис. 9

Позначимо одну клітинку вздовж горизонтальної та вертикальної осей буквами. Наприклад, позначимо час, що відповідає одній клітинці горизонтального масштабу буквою τ, а відстань, що відповідає одній клітинці вертикального масштабу, буквою l (див. рис. 10). Тоді весь шлях $8l$, а весь час 9τ. Першу частину шляху $6l$ автомобіль проїхав за час 3τ, а другу частину шляху $2l$ – за час 6τ. Отже, швидкість на першій частині $\vartheta_1 = \frac{6l}{3\tau} = 2\frac{l}{\tau}$, на другій $\vartheta_2 = \frac{2l}{6\tau} = \frac{1}{3}\frac{l}{\tau}$, на всьому шляху $\vartheta = \frac{8l}{9\tau} = \frac{8}{9}\frac{l}{\tau}$. З виразу для швидкості на першій частині знаходимо, що $\frac{l}{\tau} = \frac{1}{2}\vartheta_1$. Підставляємо й знаходимо $\vartheta_2 = \frac{\vartheta_1}{6} = 15$ км/год, $\vartheta_с = \frac{4\vartheta_1}{9} = 40$ км/год.

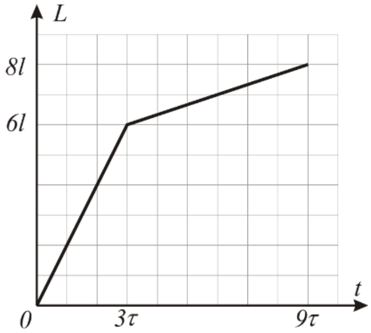

Рис. 10

2. *В теплоізольованій посудині знаходиться вода при температурі $t = 60\ ^0C$. Для вимірювання температури води використовують термометр з теплоємністю 10 Дж/К. Визначити помилку вимірювання температури, якщо теплоємність посудини з водою дорівнює 500 Дж/К, початкова температура термометра $20\ ^0C$.*

Помилка під час вимірювання температури виникає внаслідок того, що термометр має власну теплоємність C_1 і його початкова температура t_1 менша за температуру води в посудині

t_0. Отже, якась частина теплоти піде на нагрівання термометра, що призведе до зменшення температури води. Нехай температура, що встановилася після того, як у воду опустимо термометр дорівнює $(t_0 - \Delta t)$, тоді рівняння теплового балансу має вигляд:

$$C_0\Delta t = C_1(t_0 - \Delta t - t_1) \rightarrow \ \Delta t = \frac{C_1(t_0 - t_1)}{C_0 + C_1}$$

Ця величина й визначає помилку вимірювання $\Delta t \approx 0{,}8\ ^0C$.

3. *В циліндричну посудину площею перетину S і висотою H вставлений рухомий поршень. Спочатку поршень утримується трьома пружинами в рівновазі на половині висоти посудини. Коефіцієнти жорсткості кожної з пружин дорівнюють k, вони прикріплені зверху й знизу, як показано на рисунку. В посудину почали наливати рідину з густиною ρ, після чого поршень став опускатися з постійною швидкістю υ. Знайти за цими даними час T, через який рідина почне виливатися з посудини. Вважати, що під поршнем тиск повітря не змінюється, власним об'ємом пружин і поршня знехтувати.*

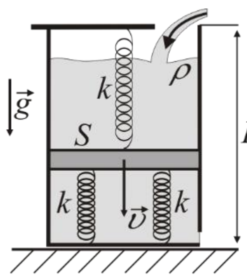

Рис. 11

За час t після початку заливання рідини сила пружності пружини, що діє на поршень, збільшиться на $3k\upsilon t$, тобто на стільки ж збільшиться вага рідини. Вага залитої рідини пов'язана зі швидкістю підйому верхнього рівня u, $\rho gS\,(u+\upsilon)t = 3k\upsilon t$, тобто $u = \upsilon\frac{3k}{\rho gS} - 1$.

Якщо u від'ємна, то верхній рівень знижується, поки поршень не досягне дна. Рідина почне виливатися, коли її верхній рівень досягне верху посудини. Якщо $u \geq V$ (тобто $3k \geq 2\rho gS$), то рідина почне виливатися в момент $T = \frac{H}{2u} = \frac{\rho gH}{2\vartheta(3k - \rho gs)}$.

При $3k < 2\rho gS$ спочатку поршень досягне дна, рухаючись зі швидкістю υ. Верхній рівень до цього моменту переміститься на $\left(\frac{3k}{\rho gS} - 1\right)\frac{H}{2}$ та буде від краю посудини на $H\cdot\left(1 - \frac{3K}{2\rho gS}\right)$. Після цього верхній рівень стане підніматися зі швидкістю $u+\upsilon$. Повний час в цьому випадку складе $T = \frac{H}{2\vartheta} + \frac{H\cdot\left(1 - \frac{3k}{2\rho gS}\right)}{u+\vartheta} = \frac{H}{u+\vartheta} = \frac{\rho gSH}{3k\vartheta}$.

4. *Електричне коло складається з резисторів і ключа K. Відомі значення опорів резисторів вказані на схемі. Символом X позначені три однакових опори. Знайти опір між точками A і B, якщо відомо, що він не залежить від того, замкнутий ключ K чи ні.*

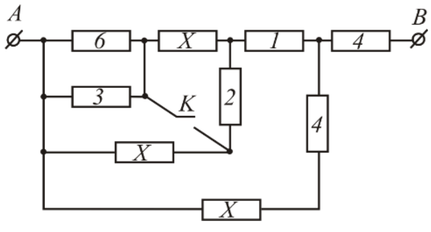

Рис. 12

Зауважимо, що паралельно з'єднані резистори *3* і *6 Ом* можуть бути замінені одним резистором з опором *2 Ом*.

Виділимо ділянку кола, до якої входить ключ (див. рис. 14). За умовою завдання, опір цієї ділянки не залежить від замикання ключа, тобто опори між точками AB' однакові на двох схемах, які вказані на рисунку.

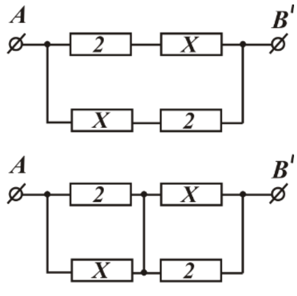

Рис. 13

$$2\,\frac{2X}{2+X} = \frac{2+X}{2}, \text{ тобто } (X-2)^2 = 0 \text{ або } X = 2\ Ом.$$

Отже, повний опір кола становить *6 Ом*.

5. Точкове джерело світла знаходиться на оптичній осі збиральної лінзи з фокусною відстанню 0,2 м на відстані 50 см від неї. По інший бік лінзи в її фокальній площині розташована розсіювальна лінза. Якою має бути фокусна відстань розсіювальної лінзи, щоб уявне зображення джерела в ній збіглося з самим джерелом?[1]

Оскільки предмет знаходиться перед збиральною лінзою за подвійним фокусом, то:

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}$$

Для розсіювальної лінзи зображення в збиральній лінзі буде уявним джерелом, тоді:

$$-\frac{1}{F_2} = -\frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2}, \quad \text{де } f_2 = d_1 + F_1,\ d_2 = f_1 - F_1$$

10 клас

1. *Під час змішування маси m_1 з температурою $t_{пл}$–t речовини в кристалічному стані та маси m_2 речовини з температурою $t_{пл}$+t в рідкому стані вся речовина знаходиться в рідкому стані при температурі плавлення. Якщо ж змішати масу m_2 речовини з температурою $t_{пл}$–t в кристалічному стані та масу m_1 речовини в рідкому стані з температурою $t_{пл}$+t, то вся речовина буде в кристалічному стані при температурі плавлення. Під час змішування речовини масою m та температурою $t_{пл}$–t_x у твердому стані та маси $m/2$ з температурою $t_{пл}$+t_x у рідкому стані під час встановлення балансу речовина переходить у твердий стан. Чому може дорівнювати t_x? Чим обмежена величина t_x? Кристалічна речовина має температуру плавлення $t_{пл}$, питому теплоємність в кристалічному стані C_1, питому теплоту плавлення λ.*

Рідкий стан при температурі плавлення: $c_1m_1\Delta t + \lambda m_1 = c_2m_2\Delta t$, де $\Delta t = t$.
Твердий стан при температури плавлення: $c_1m_2\Delta t = \lambda m_1 + c_2m_1\Delta t$. Звідки:

$$\frac{C_1\Delta t+\lambda}{C_2\Delta t+\lambda} = \frac{C_2}{C_1} \Rightarrow (C_1^2 - C_2^2)\Delta t = (C_2 - C_1)\cdot\lambda, \text{ звідки } c_1 = c_2.$$

Тоді під час змішування $\frac{m}{2}$ у рідкому стані та m у кристалічному стані рівняння теплового балансу буде мати вигляд: $C_2\frac{m}{2}\Delta t_x + \lambda\frac{m}{2} \le C_1 m\Delta t_x$.

$$C_1 = C_2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\lambda}{2} \le C_1\frac{\Delta t_x}{2}, \quad \Delta t_x \le \frac{\lambda}{C_1}, \quad t_x \le \frac{\lambda}{C_1} + t_{пл}$$

$t - t_x \ge -273\ °\mathrm{C}$, $\frac{\lambda}{C_1} + t_{пл} \le t_к$, де $t_к$ – температура кипіння.

2. *Дошка масою m_2 лежить на гладкій горизонтальній поверхні. На краю дошки знаходиться маленький брусок масою m_1. Коефіцієнт тертя між дошкою та бруском дорівнює μ. Одночасно поштовхом бруску та дошці надають початкові швидкості υ_1 та υ_2 відносно Землі в протилежні сторони. Знайдіть мінімальну довжину дошки, при якій брусок не впаде з дошки. Довжиною бруска у порівнянні з довжиною дошки – знехтувати.*

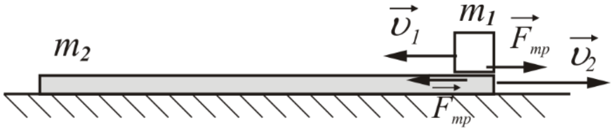

Рис. 14

[1] *У разі відсутності у завданні цієї задачі, див. розв'язок задачі № 4 з 8 класу.*

II закон Ньютона в проекції на горизонтальну вісь:

$$m_1 a_1 = F_{тр},\ m_2 a_2 = F_{тр},\ a_1 = \mu g,\ a_2 = \frac{m_1}{m_2}\mu g.$$

Тоді умова зупинки бруска відносно дошки: $-\upsilon_1 + a_1 t = \upsilon_2 - a_2 t$.

$\frac{\upsilon_1+\upsilon_2}{a_1+a_2} = t$ – час, через який брусок перестане рухатись відносно дошки. Тоді:

$$L = L_1 + L_2 = \upsilon_2 t - \frac{a_2 t^2}{2} + \upsilon_1 t - \frac{a_1 t^2}{2} = \frac{(\upsilon_1+\upsilon_2)^2}{2(a_1+a_2)} = \frac{(\upsilon_1+\upsilon_2)^2}{2\mu g\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)}$$

3. *З двох лампочок A та B номінальною потужністю 110 Вт та лампочки C потужністю 44 Вт зібрали схему (див. рис. 15) та увімкнули у мережу напругою 220 В. Яка з лампочок горить яскравіше? Щоб збільшити загальну яскравість, в ту ж схему послідовно увімкнули запобіжник – прилад практично без опору, але цей запобіжник розмикає коло, якщо сила струму в ньому перевищує 0,5 А. Чи розімкне коло запобіжник? Номінальні потужності лампочок підраховані при їх почерговому підключенню до мережі з напругою 220 В. Опір лампочок не змінюється при зміні струму, що протікає крізь них.*

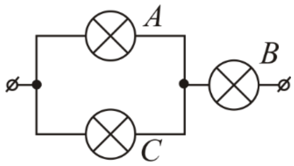

Рис. 15

А) Відповідно до формули для номінальної потужності: $P_0 = \frac{U_0^2}{R}$, отримуємо з умови $P_{0A} = P_{0B} > P_{0C}$, що $R_A = R_B > R_C$. У схемі (див. рис.) лампи A і C паралельні, тому їх напруги однакові, отже, з $R_A < R_C$ випливає $P_A > P_C$.

Лампи A і B мають однакові опори, проте струм в лампі B дорівнює сумі струмів в лампах A і C. Отже, $I_B > I_C$, відповідно $P_B > P_A$. У підсумку: $P_B > P_A > P_C$.

Відповідь: найяскравіше горить лампа B.

Б) Завдяки послідовному з'єднанню струм через запобіжник дорівнює загальному струму кола: $R_{заг} = \frac{R_A R_C}{R_A+R_C} + R_B$ (1), $I_{заг} = \frac{U_1}{R_{заг}}$ (2).

Обчислимо R_A: $\frac{U_0^2}{R_A} = P_A \Rightarrow R_A = (R_B =)\frac{U_0^2}{P_A} = \frac{220^2}{110} = 440$ Ом.

Аналогічно знайдемо R_C: $R_C = \frac{U_0^2}{P_C} = \frac{220^2}{44} = 1100$ Ом.

Врахуємо ці значення в (1) і (2):

$$R_{заг} = \frac{12}{7} R_A = \frac{12}{7} \cdot 440 \text{ та } I_{заг} = \frac{7\cdot 220}{12\cdot 440} \approx 0{,}29 \text{ А.}$$

Значення загального струму менший, ніж граничний струм запобіжника $I_з \approx 0{,}29$ *А*, звідки отримуємо відповідь – запобіжник не розімкне коло.

4. *На похилу площину з кутом нахилу 30° з деякої висоти h без початкової швидкості падає кулька, яка пружно відбивається від похилої площини й летить у бік вертикальної стінки. Після відбивання від стінки кулька потрапляє в ту ж саму точку, з якої падала. Горизонтальна відстань від точки кидання до вертикальної стінки дорівнює x. Знайти вертикальну відстань від точки кидання до похилої площини. Якою має бути початкова швидкість кульки, щоб вона попала у початкову точку, падаючи з тієї ж висоти, відбившись тільки від бокової стінки?*

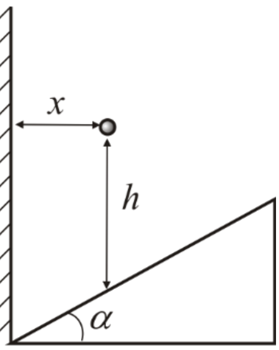

Рис. 16

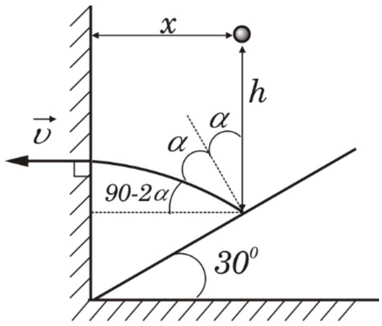

Рис. 17

Кулька після удару об стінку повернеться в початкову точку якщо в зворотньому напрямку буде рухатись за тією самою траєкторією, що й до удару («стінка–похила площина–початкове положення»). Це можливе за умови перпендикулярності швидкості до вертикальної стінки в момент удару. Тобто точка удару знаходиться у верхній точці траєкторії. Тоді дальність польоту

$$L = 2x \text{ або } L = \frac{v_1^2 \, sin[2\cdot(90-2\alpha)]}{g}$$

$$2x = \frac{v_1^2 \sin 4\alpha}{g}, \quad v_1^2 = 2gh, \Rightarrow x = h \sin 4\alpha \Rightarrow h = \frac{x}{\sin 4\alpha} = \frac{x}{\sin 120^0} = \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

Для того, щоб кулька повернулася в початкову точку після удару об стінку, продовження траєкторії після удару має бути симетричним траєкторії за відсутності стінки. Тобто парабола має проходити через точку на відстані $2x$ вздовж горизонталі та h по вертикалі від точки кидання.

$$\begin{cases} 2x = v_2 \, cos(90-2\alpha)t \\ h = v_2 \, sin(90-2\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

$h = 2x \, ctg \, 2\alpha - \frac{g \, 4 \, x^2}{2 \, v_2^2 \, sin^2 2\alpha}$, де $v_2^2 = v_x^2 + 2gh$. Знаходимо v_2, а потім v_x.

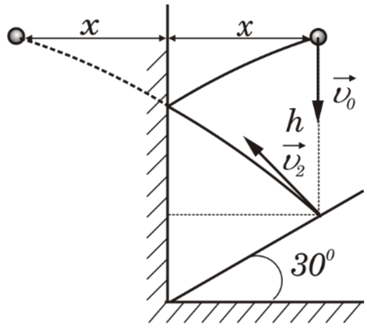

Рис. 18

5. *Тонка збиральна лінза з фокусною відстанню F = 10 см розрізана навпіл і її половини (рис.) зміщені одна відносно одної вздовж головної оптичної осі на l = 10 см. На відстані d = 30 см від верхньої лівої половини лінзи на головній оптичній осі поміщено точкове джерело світла S. Між його зображеннями, отриманими за допомогою двох половинок лінзи перпендикулярно до головної оптичної осі встановлено дзеркало Дз. Визначити відстань між зображеннями джерела світла, які дає дзеркало.*

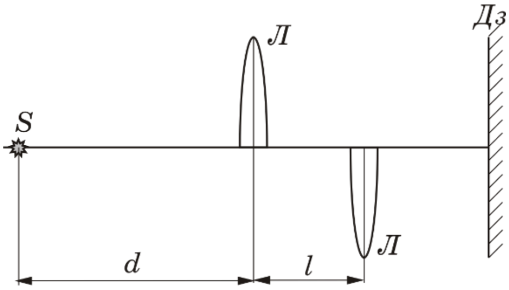

Рис. 19

Кожна половина лінзи дає зображення точкового джерела, як і ціла лінза. Оскільки $d > F$, обидва зображення дійсні. Їх відстані від відповідних половинок лінзи можна знайти за формулами

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \quad \text{і} \quad \frac{1}{d+l} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}$$

Відстань між зображеннями $x = (f_1 + l) - f = 8\frac{1}{3}$ см. Якщо поставити між зображеннями плоске дзеркало, то дійсне зображення M_1' точки M_1, яке дає ліва половина лінзи, виявиться перед дзеркалом. Уявне зображення M_1' точки M_1 міститься на такій самій відстані за дзеркалом. Зображення M_2, що його дає права половина лінзи, виявиться за дзеркалом. Це означає, що на дзеркало падатимуть промені, які сходяться до точки M_2. Відбиті промені зійдуться до точки M_2', розміщеної на такій самій відстані перед дзеркалом. Відстань між зображеннями M_1' і M_2', які дає дзеркало, дорівнює відстані між зображеннями M_1 і M_2, тобто $x = 8\frac{1}{3}$ см.

11 клас

1. *Дошка масою m_2 лежить на гладкій горизонтальній поверхні. На краю дошки знаходиться маленький брусок масою m_1. Коефіцієнт тертя між дошкою та бруском дорівнює μ. Одночасно поштовхом бруску та дошці надають початкові швидкості υ_1 та υ_2 відносно Землі в протилежні сторони. Знайдіть мінімальну довжину дошки, при якій брусок не впаде з дошки. Довжиною бруска у порівнянні з довжиною дошки – знехтувати.*

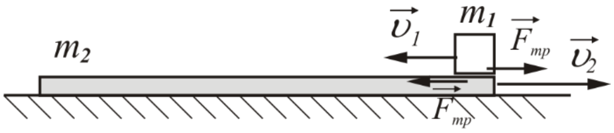

Рис. 21

ІІ закон Ньютона в проекції на горизонтальну вісь:

$$m_1 a_1 = F_{тр},\ m_2 a_2 = F_{тр},\ a_1 = \mu g,\ a_2 = \frac{m_1}{m_2}\mu g.$$

Тоді умова зупинки бруска відносно дошки: $-\upsilon_1 + a_1 t = \upsilon_2 - a_2 t$.

$\frac{\upsilon_1+\upsilon_2}{a_1+a_2} = t$ – час, через який брусок перестане рухатись відносно дошки. Тоді:

$$L = L_1 + L_2 = \upsilon_2 t - \frac{a_2 t^2}{2} + \upsilon_1 t - \frac{a_1 t^2}{2} = \frac{(\upsilon_1+\upsilon_2)^2}{2(a_1+a_2)} = \frac{(\upsilon_1+\upsilon_2)^2}{2\mu g\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)}$$

2. *За добу з циліндричної склянки діаметром D = 7 см випаровується ν = 1 моль води. Вважайте, що молекули розташовуються мономолекулярними шарами. Оцініть час випаровування одного шару молекул?*

Кожна молекула води займає об’єм, який можна представити у вигляді кубика зі стороною a, тоді, $\mu = \rho N_A a^3$, звідки $a = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho N_A}}$, де μ – молярна маса води, ρ – її густина, N_A – число Авогадро.

Кількість молекул в шарі $N = \frac{\pi D^2}{4a^2} = \frac{\pi}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{\rho D^3 N_A}{\mu}\right)^2}$.

Час випаровування одного шару

$$t = \frac{N}{\nu N_A}T = \frac{\pi D^2 T}{4\nu}\sqrt[3]{\frac{\rho^2}{\mu^2 N_A}} \approx 6\cdot 10^{-3}\text{с},$$

де T – тривалість доби.

3. *Визначити кількість теплоти, яка виділиться в колі під час замикання ключа К, схема якого зображена на рисунку. Яка кількість теплоти виділиться всередині джерела струму? Електроємності конденсаторів 2С і С. ЕРС батареї ε. Внутрішній опір батареї набагато менший за опір резистора.*

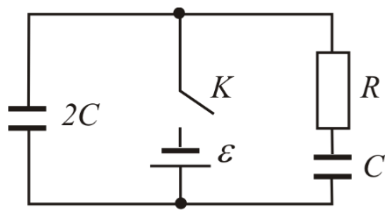

Рис. 20

Оскільки за умовою опір резистора набагато більший за опір джерела, то після замикання ключа струм зарядки конденсатора *2C* буде у багато разів перевищувати струм через резистор *R* і конденсатор *C*, тобто спочатку швидко зарядиться конденсатор *2C* до напруги ε, а потім буде заряджатися конденсатор *C*.

Під час зарядки конденсатора *2C* через джерело пройде заряд $q_1 = 2C\varepsilon$. Джерело виконає роботу $A = 2C\varepsilon^2$. Енергія конденсатора стане $W = C\varepsilon^2$. Під час цього процесу в джерелі виділиться кількість теплоти $Q_\varepsilon = C\varepsilon^2$.

Під час зарядки конденсатора *C* через резистор пройде заряд $q_2 = C\varepsilon$. При цьому джерело виконає роботу $A = C\varepsilon^2$. Енергія конденсатора стане $W = C\varepsilon^2/2$. Під час цього процесу в резисторі виділиться кількість теплоти, яка практично дорівнює $Q_R = C\varepsilon^2/2$, що у багато разів перевищує тепло, яке виділилося при цьому в джерелі.

Тоді кількість теплоти, що виділилася в колі $Q = Q_\varepsilon + Q_R = 3C\varepsilon^2/2$.

За весь час в джерелі виділиться кількість теплоти $Q_\varepsilon = C\varepsilon^2$

4. *В закритій теплоізольованій посудині знаходиться озон (0_3) при температурі $t = 527$ °C. Через деякий час озон повністю перетворюється в кисень (0_2). Визначте, у скільки разів зросте при цьому тиск в посудині, якщо на створення одного моля озону з кисню потрібно витратити $q = 141$ кДж. Теплоємність одного моля кисню при сталому об'ємі дорівнює $C = 21$ Дж/К·моль.*

Скористаємось рівнянням стану для початкового і кінцевого станів газу

$$p_1 V = \frac{m}{\mu} R T_1,\ p_2 V = \frac{m}{\mu} R T_2$$

Молярні маси пов'язані співвідношенням: $\mu_2 = 2/3\ \mu_1$. Кількість тепла, що виділиться при перетворенні озону в кисень дорівнюватиме: $Q = \frac{m}{\mu_1} q$.

З першого закону термодинаміки $Q = \Delta U$ випливає, що виділення тепла призведе до підвищення температури газу до: $T_2 = T_1 + \frac{\frac{mq}{\mu_1}}{\frac{C_V m}{\mu_2}} = T_1 + \frac{q\mu_2}{C_V \mu_1}$. Відношення тисків дорівнюватиме $\frac{p_2}{p_1} = \frac{\mu_1 T_2}{\mu_2 T_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{q}{C_V T_1} \approx 9{,}9 \approx 10$

5. *На світлині наведені шість положень кульки, які зафіксовані через рівні інтервали часу. За наведеною світлиною визначте, у скільки разів найбільша кінетична енергія кульки більша за найменшу.*

Найменша швидкість, а значить й кінетична енергія в найвищій точці *1*. Ця точка вища, бо знаходиться посередині між точками рівної висоти *0* і *2* (з симетрії траєкторії). Тоді $K_{min} = \frac{m\,\vartheta_x^2}{2}$. Найбільша енергія в нижчій точці 5, де $K_{max} = \frac{m\,\vartheta_x^2}{2} + \frac{m\,\vartheta_y^2}{2}$. Таким чином $\frac{K_{max}}{K_{min}} = 1 + \frac{\vartheta_y^2}{\vartheta_x^2}$. З кінематики $\vartheta_x = \frac{L}{t}$; $\vartheta_y = gt$, а $H = \frac{g\,t^2}{2}$, отже $\vartheta_y = \frac{2\,H}{t}$. Звідси: $\frac{\vartheta_y^2}{\vartheta_x^2} = \frac{4H^2}{L^2}$, а $\frac{K_{max}}{K_{min}} = 1 + \frac{4H^2}{L^2} = 5$.

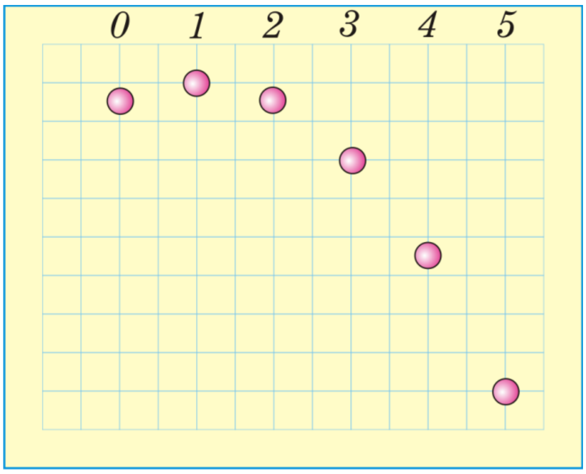

Рис. 21